L'essentiel

Suites numériques

Problématique Modélisations de phénomènes discrets et de situations économiques.	« Que vais-je bien pouvoir faire au ciel, durant toute l'éternité, si l'on ne me donne pas une infinité de problèmes à résoudre ? » Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
Points incontournables Suites géométriques (définition, propriété, somme), limite de la suite (q^n), suites arithmético-géométriques.	

◆ L'essentiel à connaître

1. Suites géométriques

Quelques rappels

On rappelle qu'une suite numérique u_n est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n (notation indicielle). Ainsi :

$$u:\begin{cases} \mathbb{N} & \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n & u(n) \end{cases}$$

n est l'indice (ou le rang) et u_n est le terme de rang n. Par exemple, u_{n+1} est le terme de rang $n+1$ (le terme suivant u_n) alors que u_n+1 est le terme de rang n augmenté de 1. Attention !! (u_n) désigne la suite alors que u_n désigne le terme de rang n.

On rappelle aussi que l'on peut définir une suite (u_n) par :

- Par l'expression de u_n en fonction de n, c'est-à-dire par une **formule explicite**. Par exemple : pour tout $\forall n\in\mathbb{N}, u_n \quad n^2$.
- Par **récurrence** : on donne le premier terme et une relation de récurrence entre un terme et le suivant. Par exemple : $u_n:\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=2u_n-5 \end{cases}$

Et en enfin, une suite peut être représentée graphiquement dans le plan. Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais **un nuage de points** car la suite n'est définie que sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$). $u_{1,5}$ n'a mathématiquement pas de sens et donc le point $(1{,}5;u_{1,5})$ non plus.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, à partir de son 1er terme, chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre.

Alors, il existe un réel q tel que, pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n \times q$.

Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n) : il est égal au quotient entre deux termes consécutifs différents de 0 : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Remarques

1. Si $q=0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être $q=1$ sont nuls.
2. Si $u_0=0$, tous les termes de la suite sont nuls.
   En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, **tous les termes de la suite sont différents de zéro.**
3. Si $q=1$ la suite est constante égale à son 1er terme.
4. Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit de démontrer que pour tout entier n le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant (donc indépendant de n). Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exemples

1) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\frac{1}{2} < 1$. Cette suite est géométrique puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{1}/2^{n+1}}{\cancel{1}/2^n} = \frac{1}{2}$. (u_n) est une suite géométrique de raison 1/2 et de 1er terme 1.

2) $v_n = n^3$. Cette suite n'est pas géométrique puisque $v_1 = 1, v_2 = 8, v_3 = 27$. On voit que pour passer du 2ème terme au 3ème on multiplie par 8 et pour passer du 3ème au 4ème on multiplie par 27/8.

Evolutions en pourcentage sur quelques exemples

- Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1+\frac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de ***t %*** , on peut définir une suite géométrique de raison $1+\frac{t}{100}$ (augmentation) ou $1-\frac{t}{100}$ (diminution).

- Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1-\frac{t}{100}$.

Exemples

1) Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1,5 % par an.
   On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :
   $C_{n+1}=(1+\frac{1,5}{100})\times C_n=1,015\times C_n$. Ainsi, (C_n) est une suite géométrique de raison 1,015 et de 1er terme $C_0=200$.

2) Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an.
   En 2012, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.
   On note r_n la quantité de rejets l'année $2012+n$ d'où :
   $r_{n+1}=(1-\frac{4}{100})\times r_n=0,96\times r_n$. Ainsi, (r_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et de 1er terme $r_0=50000$.

Propriété (formule explicite)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors, pour tout entier $n, u_n=u_0\times q^n$.
Plus généralement, on a : pour tous entiers p et n tels que $0\leq p\leq n, u_n=u_p\times q^{n-p}$.

Cette propriété est importante car elle transforme une suite géométrique, définie par récurrence en une suite définie explicitement.

Exemples

1) Soit (u_n) la suite géométrique de raison ½ et de 1er terme 2.
   Alors, $u_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$. D'où, $u_4=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$.
2) On reprend l'exemple du groupe industriel (cf plus haut). L'objectif de ce groupe est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40 %). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans ?

   Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de
   $r_{10}=50000\times 0,96^{10}\approx 33242$.
   Avec une réduction de 4% par an, en 2022, l'objectif ne sera pas atteint par l'entreprise.

Sens de variation – un cas particulier

- Si $0<q<1$, alors la suite (q^n) est décroissante.

Si $q=-1$, c'est ce qu'on appelle une suite « alternée » puisque suivant la parité de n, elle prend périodiquement les valeurs 1 et -1.

- Si $q > 1$, alors la suite $\left(q^n\right)$ est croissante.
- Si $q = 1$, alors la suite $\left(q^n\right)$ est constante (=1).
- Si $q \leq -1$, alors la suite $\left(q^n\right)$ n'est pas monotone.

Exemples

1) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme, $\frac{1}{2} < 1$la suite u est décroissante.
2) $v_n = 1{,}01^n$. Comme 1,01>1, la suite v est croissante.

Généralisation du sens de variation

(i) Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison q.

- Si $0 < q < 1$,la suite (u_n)est strictement décroissante.
- Si $q > 1$, la suite (u_n)est strictement croissante
- Si $q = 1$, la suite (u_n)est constante.

(ii) Si $u_0 < 0$ les résultats précédents s'inversent.

Sommes des termes consécutifs de la suite $\left(q^n\right)$

Pour tout nombre réel $q \neq 1$ et tout entier naturel n, on a :

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Si q=1, on a :

$$S_n = \underbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad n \quad 1}_{(n+1) fois}$$

Pour $q \neq 1$**,** on peut introduire le symbole sigma $\sum$ afin de simplifier l'écriture :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

2. Limite de la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Etudier la limite d'une suite (u_n)c'est chercher ce que deviennent les termes $u_n$lorsque n devient très grand (on dit que « n tend vers l'infini ») ; plus précisément :

- Les termes $u_n$finissent-ils par se rapprocher d'un nombre fixe ?
- Les termes $u_n$finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre aussi grand que l'on veut ?

En Terminale ES, on ne s'intéressera qu'aux suites $u_n = q^n$ du type où $q > 0$.

Propriété

- Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$. On dit que la suite (q^n) converge vers 0.
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$. On dit que la suite (q^n) diverge.
- Si $q = 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$. On dit que la suite (q^n) converge vers 1.

Si $q \leq -1$, alors $\left(q^n\right)$ n'admet pas de limite, finie ou infinie.

Exemples

1) Soit $u_n = 2^n$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ car $q = 2 > 1$.

2) Soit $v_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ car $q = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

Quelques compléments

(i) Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. Alors, on a pour tous réels a et b :

- $\lim_{n \to +\infty} a u_n = 0$
- $\lim_{n \to +\infty} a u_n + b = b$.

(ii) Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Alors, on a pour tous réels a et b :

- $\lim_{n \to +\infty} a u_n = +\infty$ si $a > 0$
- $\lim_{n \to +\infty} a u_n = -\infty$ si $a < 0$
- $\lim_{n \to +\infty} u_n + b = +\infty$.

Exemples

1) Soit $u_n = 1 - \frac{1}{3^n}$. Alors, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

2) Soit $u_n = -2 \times 7^n$. Alors, $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Recherche d'un seuil à l'aide d'un algorithme

Exemple 1

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme $u_0 = 50000$. Comme $0 < 0{,}96 < 1$, la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.

L'algorithme ci-dessous, permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000. C'est-à-dire déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geq p, 50000 \times 0{,}96^n \leq 30000$.

INITIALISATION :

Affecter à N la valeur 0

Affecter à U la valeur 50 000

TRAITEMENT :

Tant_que $U > 30000$

  Affecter à N la valeur $N + 1$

  Affecter à U la valeur $0{,}96 \times U$

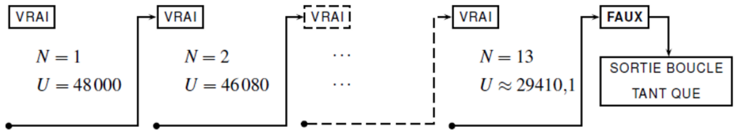
Fin Tant_que

SORTIE

Afficher N

Le traitement de l'algorithme est le suivant :

Tant que la condition U>30 000 est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle « Tant que ».



En sortie, l'algorithme affiche 13. Donc, pour tout entier $n \geq 13$, on a $50000 \times 0{,}96^n \leq 30000$.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $u_0 = 2000$. Comme $1{,}015 > 1$ et $u_0 > 0$, la suite (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.
L'algorithme ci-dessous, permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur à 3 000. C'est-à-dire déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geq p, 2000 \times 1{,}015^n > 3000$.

Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 2000
Traitement :	Tant_que $U \leqslant 3000$
	Affecter à N la valeur $N + 1$
	Affecter à U la valeur $1{,}015 \times U$
	Fin Tant_que
Sortie :	Afficher N

En sortie, l'algorithme affiche 28. Donc, pour tout entier $n \geq 28$, on a $2000 \times 1{,}015^{n} > 3000$.

3. Suites arithmetico-géométriques

Définition

Soit a et b deux réels. On dit qu'une suite (u_n) est **arithmético-géométrique** si elle est définie par la donnée de u_0 (son 1er terme) et de la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$.

Cas particuliers

1. Si $a = 0$, (u_n) est constante à partir du rang 1 au moins.
2. Si $a \neq 0, b = 0$, (u_n) est géométrique de raison a.
3. Si $a = 1$, (u_n) est arithmétique de raison b.

Exemple

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3 \end{cases}$$

(u_n) est bien une suite arithmético-géométrique où $a = \frac{1}{2}, b = 3$.

Représentation graphique

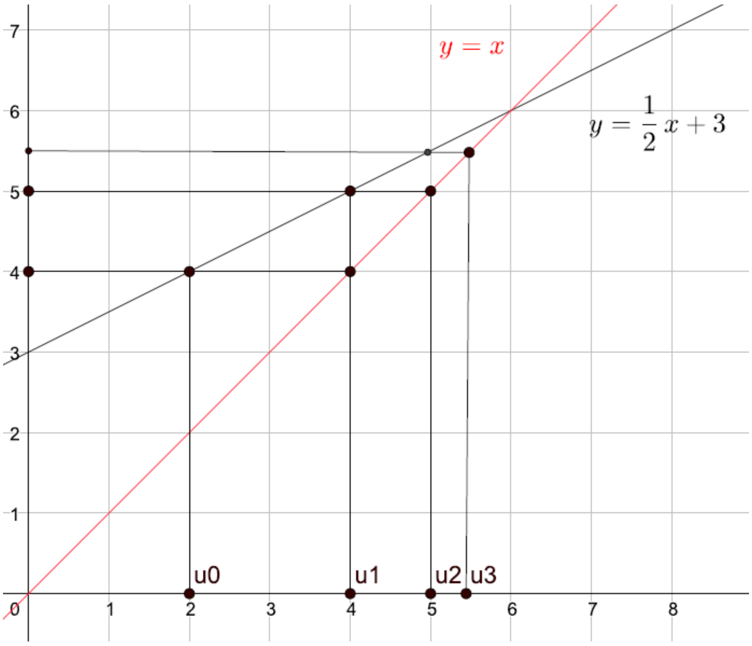
Soit a et b deux réels tels que $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

(u_n) est la suite arithmético-géométrique définie par u_0 et pour tout entier $n, u_{n+1} = au_n + b$.

On trace la courbe représentative de la fonction affine $f : x \mapsto ax \quad b$ et la droite Δ d'équation $y = x$.

Exemple

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3 \end{cases}$$



On conjecture graphiquement que la suite converge vers 6.

On peut montrer que u_n s'exprime de la façon suivante :

$u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$

Je me teste ! Un vrai ou faux

Dire si les énoncés sont vrais ou faux

- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n \ 0{,}5u_n+4$ avec $u_0=2$. Alors, la suite v définie par $v_n=u_n-8$ est géométrique de raison 0,5.
- En reprenant les mêmes hypothèses que ci-dessus, la suite (v_n) est strictement croissante.
- En reprenant les mêmes hypothèses, la suite (u_n)a pour limite -8.
- Soit la suite (w_n) géométrique de raison 3 et de premier terme $w_1=\frac{1}{3}$, alors on a :

$$w_1+w_2+\ldots+w_8=\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^9}{1-\frac{1}{3}}$$

Dernière minute

Ne pas oublier ce que c'est une suite géométrique et une suite arithmétique (retournez dans vos cours de première). Utilisez la calculatrice afin de regarder le comportement de la suite ou pour déterminer un seuil à l'aide du tableau de valeurs.

Je lis, je consulte, je surfe

Pour s'entraîner sur des exercices de sujets de Bac rangés par chapitres : Yannick DO, *Les sujets du Bac*, Paris, Ellipses, 2015.

Pour ceux qui veulent en savoir plus sur les suites : Bibliothèque Tangente, *Suites & séries, HS n°41*, Paris, éditions POLE, 2011.

Pour ceux qui veulent faire le lien entre les mathématiques et l'économie : Frantz BADUFLE, Rémi CHAUTARD, *Comprendre les sciences éco par les maths,* Paris, Ellipses, 2015.

Pour ceux qui veulent en savoir plus sur la modélisation de phénomènes économiques, biologiques, physiques par les suites et autres *: Nicolas BACAER,* Histoire de mathématiques et de populations, Paris, Cassini, 2008.

Pour ceux qui veulent se cultiver de manière générale sur les mathématiques : http://images.math.cnrs.fr/

Savoir-faire et compétences

◆ Savoir étudier une suite arithmetico-géométrique

Très souvent au BAC, lorsque l'on vous propose un exercice sur les suites, il fait intervenir une suite arithmetico-géométrique (du type $u_{n+1}=au_n+b$). Parfois, on vous demande de déterminer l'expression de la suite. Cela fait intervenir les coefficients multiplicateurs : $1+\frac{t}{100}$ (lors d'une hausse) et $1-\frac{t}{100}$ (lors d'une baisse) puisque ces suites modélisent des situations comme l'étude du remboursement d'un capital ou celle de l'évolution de population. A l'aide de l'expression de la suite, on vous demandera de calculer ses premiers termes u_1, u_2, u_3 si u_0 est le 1er terme. N'oubliez pas que ses termes se calculent dans l'ordre à partir de u_0 puisque vous avez à faire à une suite définie par récurrence. Ensuite, l'énoncé vous proposera d'étudier une suite auxiliaire (v_n) telle que $v_n=u_n-c$ où c est un réel donné en suivant ce cheminement de questions :

- Monter que (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son 1er terme.
- Déterminer l'expression de v_n puis celle de u_n.
- Déterminer la limite de (u_n)

On peut aussi, vers la fin de l'exercice, vous proposez un algorithme et d'en comprendre le fonctionnement afin de déterminer n tel que soit $u_n<k$ ou $u_n>k$ ou $u_n\leq k$ ou $u_n\geq k$ cela dépendant du contexte.

Le conseil du prof

Les suites géométriques sont au cœur de ce chapitre. Il est donc indispensable que vous maîtrisiez ce type de suite. Il ne faut pas hésiter à utiliser la calculatrice afin de vérifier que les résultats concordent avec vos raisonnements (seuils, ses de variation, limites).

Les sujets qui peuvent tomber

Voici deux exemples où les suites arithmético-géométriques interviennent :

A. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$ et $u_1=-1$. Calculer u_2, u_3 et u_4 .

B. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par $u_{n+1}=0{,}8u_n+300$ et $u_1=1000$. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par $v_n=1500-u_n$. Monter que v est géométrique.

◆ Un exemple appliqué

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n positif par $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$ et $u_0=5$.

On introduit la suite auxiliaire $v_n=u_n-2$. Etudier cette suite : type de suite (géométrique), expression de v_n en fonction de n.

Puis revenez à l'étude de la suite (u_n) : expression de u_n en fonction de n et limite.

1) Commençons par montrer que (v_n) est géométrique :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-2}{u_n-2}=\frac{\frac{1}{2}u_n+1-2}{u_n-2}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}u_n-1}{u_n-2}=\frac{\frac{1}{2}(u_n-2)}{u_n-2}=\frac{1}{2}$$

On peut donc dire que (v_n) est <u>géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$</u> et de 1^er^ terme $v_0=u_0-2=5-2=3$. On en déduit que $v_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2) Déterminons maintenant l'expression de u_n :

Comme $v_n=u_n-2$ soit encore $u_n=v_n+2$ puis $u_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n+2$.

Déterminons enfin, la limite de (u_n) :

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3\times 0+2$

Soit encore :

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

<u>On conclut que (u_n) converge vers 2.</u>

Je gagne des points !

Ne pas oublier que pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer qu'il est égal à un nombre qui sera la raison de la suite.

Je gagne des points !

On rappelle que lorsque $0<q<1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$

Exercice issu du BAC 2013, Asie (Sujet modifié)

Un gestionnaire d'une salle de concert constate que, chaque année, le nombre d'abonnés diminue de 30 % des abonnés de l'année précédente, auxquels s'ajoutent 210 nouveaux abonnés.

Le nombre d'abonnés en 2010 était de 600.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2011 et 2012.
2. On définit la suite (u_n) comme étant le nombre d'abonnés l'année 2010+n. On a donc $u_0 = 600$. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 210$.
3. On utilise un tableur pour calculer les termes de la suites (u_n).

	A	B
1	n	un
2	0	600
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	

Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer u_1 ; cette formule « tirée vers le bas » dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite (u_n).

4. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 700$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}7$. Préciser son 1er terme.

   b) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n = 700 - 100 \times 0{,}7^n$.
5. a) Soit n un entier naturel. Démontrer que $u_n \geq 697 \Leftrightarrow 0{,}7^n \leq 0{,}03$.

Le conseil

Ne pas perdre de vue le contexte de l'énoncé puisque cela sera réinvesti après l'étude théorique.

b) Pour résoudre cette inéquation, on utilise l'algorithme suivant :

Variables :	N est un nombre entier naturel
Initialisation :	Affecter à N la Valeur 0
	Affecter à U la valeur 1
Traitement :	Tant que $U > 0,03$
	Affecter à N la valeur $N+1$.
	Affecter à U la valeur $0,7 \times U$.
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N.

Quelle valeur de N obtient-on en sortie ? *Justifier*

c) En utilisant l'étude précédente de la suite (u_n), déterminer à partir de quelle année le nombre d'abonnés atteindra au moins 697.

Corrigé

1. - Le nombre d'abonné en 2011 est de :

   $600 \times \frac{70}{100} + 210 = 420 + 210 = 630$.

   - Le nombre d'abonné en 2012 est de :

   $630 \times \frac{70}{100} + 210 = 441 + 210 = 651$.

2. Si l'année suivante, il y a une diminution de 30 % du nombre d'abonnés par rapport à l'année 2010+n, cela veut dire que le nombre d'abonnés l'année 2010+(n+1) est de : $(1 - \frac{70}{100}) \times u_n = 0,3 \times u_n$. De plus, si l'on ajoute les 210 nouveaux abonnés chaque année, on a pour tout entier naturel $u_{n+1} = 0,7u_n + 210$.

3. La formule à écrire dans la cellule B3 pour calculer u_1 est :

   =B2*0.7+210 ; on recopie cette formule dans les cases B4, B5, ect.

4. a) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 700}{u_n - 700} = \frac{0,7u_n + 210 - 700}{u_n - 700} = \frac{0,7u_n - 490}{u_n - 700} = \frac{0,7(u_n - 700)}{u_n - 700} = 0,7$

   Donc, la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7. Son 1er terme est $v_0 = u_0 - 700 = 600 - 700 = -100$.

   b) D'après la question précédente, comme (v_n) est géométrique de raison 0,7 et de 1er terme -100, $v_n = -100 \times 0,7^n$. De plus, on a $v_n = u_n - 700 \Leftrightarrow u_n = v_n + 700 = -100 \times 0,7^n + 700$.

Ce que je dois mobiliser

Lorsqu'une diminution de t % est en jeu, on fait intervenir le coefficient multiplicateur associé à cette baisse : $(1 - \frac{t}{100})$.

5. a) On raisonne par équivalence :

$u_n \geq 697 \Leftrightarrow 700 - 100 \times 0,7^n + 700 \geq 697 \Leftrightarrow$

$3 \geq 100 \times 0,7^n \Leftrightarrow 0,03 \geq 0,7^n \Leftrightarrow 0,7^n \leq 0,03$.

b) On fait tourner l'algorithme de la façon suivante

	N	U
Initialisation	0	1
Traitement	1	0,7
	2	0,49
	3	0,343
	4	0,240
	5	0,168
	6	0,118
	7	0,082
	8	0,058
	9	0,040
	10	0,028
Sortie	On affiche 10	

L'algorithme affiche comme valeur N=10.

c) D'après les 2 questions précédentes, le nombre d'abonnés atteindra au moins 697 pour l'entier naturel n tel que $u_n \geq 697$ c'est-à-dire pour $n \geq 10$ donc à partir de l'année 2010+10=2020.

Le conseil

Pour aller plus vite, vous pouvez tout d'abord, rentrer l'expression de la suite à l'aide de la calculatrice, puis afficher le tableau de valeurs (ça vous évite des calculs…).

Suites adjacentes

1. Définition

Dire que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes signifie que :

(i) l'une est croissante ;

(ii) l'autre est décroissante ;

(iii) la suite $(u_n - v_n)$ (ou $(v_n - u_n)$) converge vers 0.

2. Théorème

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

3. Propriété

Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes de limite commune l, en supposant que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors on a l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \quad l \quad v_n$.

4. Remarque

Le théorème précédent affirme que deux suites adjacentes convergent sans en fournir l'expression de la limite (ce qui est assez difficile dans certains cas). Cependant la dernière propriété nous fournissant l'encadrement, donne des valeurs de la limite commune à une précision quelconque (voir une application dans l'exercice 1).

Un exemple appliqué

On définit deux suites (u_n) et (v_n) définies pour n entier naturel non nul par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} \,,$$

$v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$. **Démontrer dans un premier temps l'inégalité suivante :** $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ **pour tout n entier naturel non nul.** **Puis, en déduire que ces deux suites sont adjacentes.** Montrons, tout d'abord, l'inégalité. On a : $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{2(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (1). Or : $\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{2\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ Soit : $\boxed{\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}$ Maintenant, montrons que ces deux suites sont adjacentes. 1) <u>Etape 1 : monotonie des suites (u_n) et (v_n)</u> ▪ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} =$ $\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right) \geq 0$ d'après le résultat précédent (côté droit de l'inégalité). $\boxed{\text{Donc, } (u_n) \text{ est croissante}}$. ▪ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} =$ $\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) \leq 0$ d'après le résultat précédent (côté gauche de l'inégalité). $\boxed{\text{Donc, } (v_n) \text{ est décroissante}}$.	**Ce que je dois mobiliser** Ici la « fameuse » forme conjuguée s'utilise pour pouvoir transformer l'expression centrale. **Ce que je dois mobiliser** On rappelle que pour étudier la monotonie d'une suite (u_n) , la méthode générale est de calculer la

2) <u>Etape 2 : Etude de la limite de (v_n-u_n)</u>

On a : $v_n-u_n=-2\sqrt{n}+2\sqrt{n+1}=2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, d'après (1).

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$. Soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-u_n=0}$.

3) **Bilan** :

$\boxed{\text{On conclut que les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont bien adjacentes}}$.

différence $u_{n+1}-u_n$ et d'en étudier le signe.

Exercice 1 *Une approche du nombre e …*

Soit n un entier naturel supérieur à 1. On pose :

$U_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}$; $V_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{1}{n!}$.

Notation factorielle : « Factorielle n » se note $n!$ pour $n\in\mathbb{N}$; on a par convention $0!=1$ et pour $n\geq 1$, $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$.

1. Montrer que les suites $(U_n)_{n\geq 2}$ et $(V_n)_{n\geq 2}$ sont deux suites de rationnels.
2. Démontrer que les suites $(U_n)_{n\geq 2}$ et $(V_n)_{n\geq 2}$ sont deux suites adjacentes.
3. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que leur limite commune L est un irrationnel.
4. A l'aide de votre calculatrice, calculer les dix premiers termes de chacune de ces deux suites et vérifier que U_{10} est une valeur approchée du nombre e à 3×10^{-8} près.

Ce que je dois mobiliser
On rappelle que pour un raisonnement par l'absurde on suppose le contraire de ce que l'on veut montrer pour arriver à une absurdité.

Exercice 2

Soient u et v définies par : $u_0=1, v_0=12$ et pour tour n entier naturel,

$u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$ et $v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4}$.

1. Montrer que la suite $(u_n-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. On précisera sa raison et son 1[er] terme.

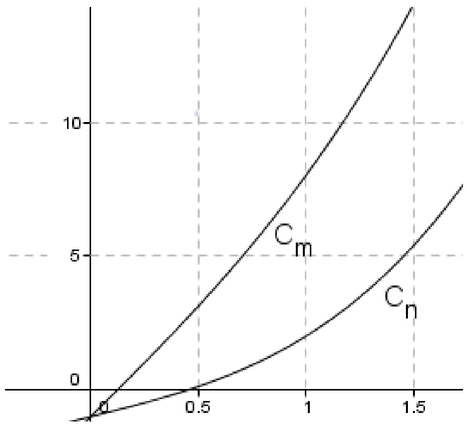
2. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

3. En considérant $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$, calculer la limite des suites u et v.

Exercice 3 *D'après un sujet de concours*

Pour tout n $\mathbb{N}$, on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^3 + 2nx - 1$ et on appelle C_n la courbe associée à f_n dans un repère du plan. On admet que, quel que soit n $\mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $[0\ ;1]$; cette solution sera notée a_n.

Ci-dessous, on a tracé deux courbes C_n et C_m (avec $m < n$).



1. Montrer quel que soit n $\mathbb{N}$ que C_{n+1} est en-dessous de C_n.
2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
3. On suppose dans cette question que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
   Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2na_n = -1$.