Un peu d'histoire des maths

En 1654, Blaise Pascal (1623-1662) entretient avec Pierre de Fermat (1601-1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités. Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme par exemple celui du Chevalier de Méré :
« Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »
Pierre de Fermat fut philologue (spécialiste de langage à partir de documents écrits), administrateur puis Conseiller du Roi au Parlement de Toulouse (l'équivalent d'une cour de justice), il restera dans la mémoire des hommes comme un des plus grands mathématiciens du 17è siècle. Il fut un des artisans fondateurs de l'Académie des sciences qui vit officiellement le jour un an après sa mort. En même temps que Roberval et Descartes, Fermat pose les principes de la géométrie analytique (1636) en étudiant des courbes par le biais d'une équation et se querelle avec ce dernier sur les problèmes de tangence aux courbes (on parlait à l'époque de *touchante* plutôt que de *tangente*), point de départ de la notion de nombre dérivé et du calcul différentiel et intégral, car il exposa aussi, vers 1638-40, des méthodes de quadrature (calcul d'aires) proches de l'intégrale de Riemann concernant en particulier la parabole, l'hyperbole, la cissoïde, la spirale d'Archimède. Reprenant les travaux de Diophante d'Alexandrie, traduits et complétés par Bachet de Méziriac, il redora le blason de l'arithmétique en créant *la théorie des nombres*. De nombreux résultats sont attachés à son nom. Fermat s'intéressa aussi aux sciences de la nature : principe de Fermat (optique). Les œuvres de Fermat furent éditées par son fils Samuel : *Varia opera mathematica* (Toulouse, 1679). Cependant, Fermat ne fit pas état de toutes ses découvertes, encore moins de ses rarissimes démonstrations et on estime perdu un certain nombre de ses recherches arithmétiques.

I Variable aléatoire discrète

Définition Soit Ω un univers et P une loi de probabilité sur Ω.
On définit une variable aléatoire X sur Ω en associant un nombre réel à chaque événement élémentaire de Ω. Une variable aléatoire est donc une fonction de Ω dans ℝ.
Plus précisément, si $\{x_1; x_2; \dots, x_n\} = X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X sur Ω (ou appelé univers image) alors, pour tout entier i compris entre 1 et n, l'événement «X prend la valeur x_i » est noté « $X = x_i$ ». Sa probabilité $P(X = x_i)$ est la probabilité de l'ensemble des issues ayant pour image x_i par X.

Notation Une variable aléatoire est généralement notée X, Y, Z ,…

Exemple et contre-exemple

1) On lance deux fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré. Une issue de l'expérience aléatoire est un couple $(x; y)$ où x est le résultat du 1er lancer et y le lance du 2ème lancer.

L'univers associé à cette expérience aléatoire contient 36 issues. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque couple (x, y) associe la somme $x + y$. On représente la situation à l'aide d'un tableau à double entrée :

Premier lancer \ Deuxième lancer	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$X(\Omega) = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.
$\{X = 10\} = \{(4; 6), (5; 5), (6; 4)\}$.
On veut calculer la probabilité de l'événement : {X=10}.
On est en situation d'équiprobabilité, il y a 36 issues possibles, $\{X = 10\}$ contient 3 issues donc : $P(\{X = 10\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

2) Associer au tirage d'une boule dans une urne la couleur de la boule tirée ne définit PAS une variable aléatoire car la couleur n'est pas un nombre.

Passons maintenant à loi de probabilité d'une va (abréviation de Variable Aléatoire) :

Définition Lorsque, à chaque valeur de x_i de $X(\Omega)$, on associe la probabilité $P(X = x_i)$, on définit sur l'univers $X(\Omega)$ une loi de probabilité appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Remarques Soit X une va prenant les valeur $x_1; \ldots; x_n$.

1. On a $\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) = 1$.
2. On peut représenter la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2		x_n
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$		$P(X = x_n)$

Exemple Reprenons l'exemple précédent :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On veut calculer la probabilité d'obtenir un résultat au moins égal à 10.

$$\begin{aligned} P(\{X \geqslant 10\}) &= P(\{X = 10\} \cup \{X = 11\} \cup \{X = 12\}) \\ &= P(\{X = 10\}) + P(\{X = 11\}) + P(\{X = 12\}) \\ &= \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(les événements $\{X = x_i\}$ et $\{X = x_j\}$, pour $x_i \neq x_j$, sont incompatibles)

II Paramètres d'une loi de probabilité

2.1 Espérance, variance, écart-type

Définition Soit X une va prenant les valeur $x_1; \ldots; x_n$ dont la loi de probabilité est représentée par le tableau suivant :

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2		x_n
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$		$P(X = x_n)$

(i) L'espérance mathématique de X, notée E(X), est la moyenne des x_i :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

(ii) La variance de X, notée V(X), est la moyenne des carrés des écarts $(x_i - E(X))^2$:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 P(X = x_i).$$

(iii) L'écart-type de X, noté σ(X), est défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

1. Le mot « espérance » vient du jeu : Si X est le gain, E(X) est ce que le joueur peut espérer gagner sur un très grand nombre de parties. Le jeu est favorable si E(X)>0, défavorable si E(X)<0, équitable si E(X)=0.
   L'espérance est la moyenne de la série des x_i pondérés par les probabilités $p_i = P(X = x_i)$
   En effet :
   E(X) = $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \dfrac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{1} = \dfrac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$
   En répétant un grand nombre de fois l'expérience, la loi des grands nombres nous permet d'affirmer que les fréquences se rapprochent des probabilités théoriques.
   La moyenne des résultats se rapprochent donc de l'espérance de la loi de probabilité.
2. L'écart-type est une caractéristique de dispersion « espérée » pour la loi de probabilité de la va. Plus l'écart-type (ou la variance) est élevé, plus les valeurs sont dispersées autour de l'espérance.
3. L'espérance et l'écart-type sont exprimés dans la même unité que les valeurs x_i prises par X.

Exemple

Reprenons l'exemple du début du chapitre.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \cdots + 12 \times \frac{1}{36} = 7$$
$$V(X) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \cdots + 12^2 \times \frac{1}{36} - 7^2 = \frac{210}{36}$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{210}}{6} \simeq 2,415$$

2.2 Propriétés de l'espérance, la variance et l'écart-type

On reprend les mêmes notations que la partie précédente.

Propriété *Formule de König-Huygens*
La variance est également donnée par la formule suivante :
$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(x)]^2$$

Propriétés *Effet d'une transformation affine*
Soit X une va et soit a,b deux réels. On a :
(i) $E(aX + b) = aE(X) + b$;
(ii) $V(aX + b) = a^2V(X)$;
(iii) $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

Démonstrations (toutes sont à connaître sauf (iii))

$Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$ où $y_i = ax_i + b$ pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant k$.
Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant k$, on a $P(Y = y_i) = P(Y = ax_i + b) = P(x_i)$.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{k} y_i P(Y = y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (ax_i + b) P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} [ax_i P(X = x_i) + bP(X = x_i)] \\ &= a \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) + b \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) \end{aligned}$$

Or, $\sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = 1$ donc $E(Y) = aE(X) + b$.

$$\begin{aligned} V(Y) &= \sum_{i=1}^{k} [y_i - E(Y)]^2 P(Y = y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} [(ax_i + b) - (aE(X) + b)]^2 P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a^2 [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^{k} [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i) \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

Exemple Le nombre d'entrées pour un spectacle peut être modélisé par une va X d'espérance mathématique 200 et de variance 25. Le prix d'entrée est de 15 €.
Si Y est la va égale à la recette du spectacle, alors Y=15X.
D'où : $E(Y) = E(15X) = 15E(X) = 3000$ et $V(Y) = V(15X + 2) = 15^2 V(X) = 5625$

III Répétitions d'expériences identiques et indépendantes

3.1 Définitions

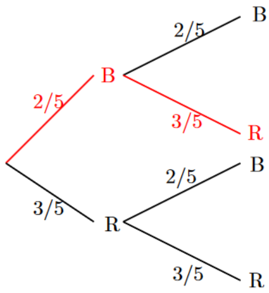
Il y a répétition d'expérience identiques lorsque la même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois de suite.
Ces expériences aléatoires successives sont indépendantes lorsque l'issue de l'une quelconque ne dépend pas de l'issue des autres expériences.

Exemple On lance trois fois de suite un dé équilibré. Le numéro obtenu lors d'un lancer ne dépend pas du numéro obtenu aux deux autres lancers.

3.2 Modélisation d'une répétition

Propriété Dans le cas d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes, un événement est une liste de résultats et la probabilité de cet événement est le produit des probabilités de chacun des résultats de la liste.
Plus précisément, si on considère une expérience à deux issues A et B avec les probabilités P(A) et P(B) et si on répète l'expérience 2 fois de suite alors la probabilité s'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est égale à $P(A) \times P(B)$.

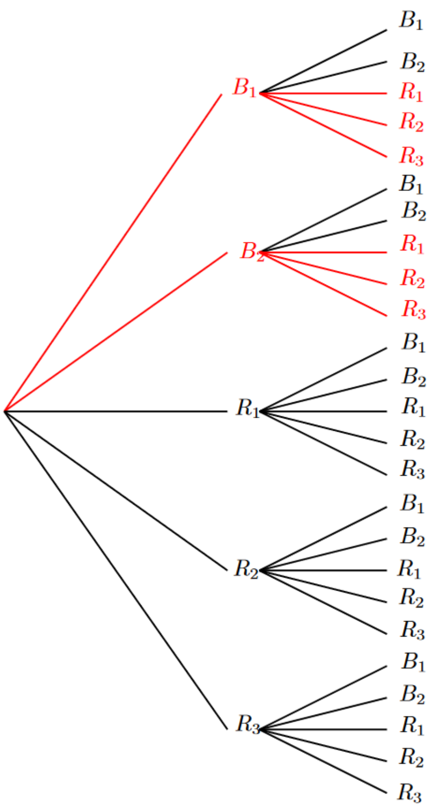
Exemple Une urne contient 2 boules bleues et trois boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement deux boules avec remise de cette urne. On est dans le cas d'une répétition de deux tirages successifs indépendants.



Soit A l'événement : « tirer une boule bleue suivie d'une boule rouge ». On a :$P(A)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$.

Calculer la probabilité de l'événement D : « tirer deux boules de couleur différente ».
$D=D_1\cup D_2$ où D_1 est l'événement « tirer ue boule bleue puis une boule rouge » et D_2 est l'événement « tirer une boule rouge puis une boule bleue ».
Ces deux événements sont incompatibles donc $P(D_1\cup D_2)=P(D_1)+P(D_2)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$.

Il existe une autre méthode, avec cet arbre :



On représente les divers tirages possibles par un arbre : il y a 5×5 tirages possibles.
Les tirages sont équiprobables.
Soit A l'événement « tirer une boule bleue suivie d'une boule rouge ».
Il y a $2\times3=6$ tirages composés d'une boule bleue suivie d'une boule rouge.
$P(A)=\frac{6}{25}=\frac{2\times3}{5\times5}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$.