I Opérations sur les fonctions dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I. On a le tableau suivant, ***à connaître par cœur !***

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)'=u'+v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)'=ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)'=u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Démonstrations (à lire et à comprendre)

- Montrons que $(ku)'=ku'$

$$\frac{ku(a+h)-ku(a)}{h}=\frac{k[u(a+h)-u(a)]}{h}=k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

- Montrons que $(u+v)'=u'+v'$

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=\frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$, c'est-à-dire $(u'+v')(a)$

- Montrons que $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$\frac{\frac{1}{u(a+h)}-\frac{1}{u(a)}}{h}=\frac{\frac{u(a)-u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h}=\left(\frac{u(a)-u(a+h)}{h}\right)\frac{1}{u(a+h)u(a)}$$

Lorsque que h *tend* vers 0, $\frac{u(a)-u(a+h)}{h}$ *tend*, par définition, vers $-u'(a)$ et $\frac{1}{u(a+h)u(a)}$ *tend* vers $\frac{1}{u^2(a)}$, donc $\frac{\frac{1}{u(a+h)}-\frac{1}{u(a)}}{h}$ *tend* vers $-\frac{u'(a)}{u^2(a)}$

- On admettra que $(uv)'=u'v+uv'$
- Montrons que $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

On a vu que $(uv)'=u'v+uv'$, or $\frac{u}{v}=u\times\frac{1}{v}$, donc $\left(\frac{u}{v}\right)'=u'\times\frac{1}{v}+u\times\left(-\frac{v'}{v^2}\right)=\frac{u'v}{v^2}-\frac{uv'}{v^2}=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

◊

Exemple 1

La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}+x^3+x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+3x^2+1$.

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=2x^2\times\sqrt{x}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, on pose $u(x)=\ldots\ldots\ldots$ et $v(x)=\ldots\ldots\ldots$
Les fonctions u et v sont dérivables sur .... ; $u'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $v'(x)=\ldots\ldots\ldots$

La fonction f est alors dérivable sur ....et on a :

$f'(x)=$ ....

Exemple 3

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{3x+6}$.

Pour tout $x\in\,]-2;+\infty[$, on pose $u(x)=3x+6$.

La fonction u est dérivable et ne s'annule pas sur $]-2;+\infty[$. On a de plus : $u'(x)=\ldots\ldots$

f est donc dérivable sur ....et on a $f'(x)=$...............

Exemple 4

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$.

Pour tout $x\in\,]1;+\infty[$, on pose $u(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $v(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]1;+\infty[$ et v ne s'annule pas sur cet intervalle.

De plus, on a $u'(x)=\ldots\ldots$ et $v'(x)=\ldots\ldots$

f est donc dérivable sur ....et on a $f'(x)=$... ....

II Applications de la fonction dérivée

2.1 Lien entre signe de la fonction dérivée et sens de variation

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse x est la droite la plus proche à la courbe au voisinage du point de la courbe d'abscisse x. Il est naturel de penser que lorsque la tangente « monte », la courbe « monte » et quel lorsque la tangente « descend », la courbe « descend », et réciproquement. Ou, plus mathématiquement, lorsque la fonction affine dont la tangente est la représentation graphique est croissante (respectivement décroissante), f est aussi croissante (respectivement décroissante) et réciproquement. Or, la croissance et la décroissance d'une fonction affine dépendent du signe de son coefficient directeur, ici $f'(x)$. Ainsi, étudier les variations de f revient donc à étudier le signe de sa fonction dérivée selon les valeurs de x.

On admettra la propriété suivante (qui est attribuée à Joseph-Louis Lagrange) :

Propriété Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I. On a les équivalences suivantes :
(i) Pour tout réel x de I, $f'(x)\geq 0 \iff f$ est croissante sur I.
(ii) Pour tout réel x de I, $f'(x)\leq 0 \iff f$ est décroissante sur I.
(iii) Pour tout réel x de I, $f'(x)=0 \iff f$ est constante sur I.

Remarques

1. Dans les cas où les inégalités seraient strictes pour tout réel x de I, alors f serait strictement croissante ou décroissante sur I.
2. On dit qu'une fonction est monotone sur un intervalle lorsqu'elle est partout croissante ou bien partout décroissante sur cet intervalle.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 8$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$.
$f'(x) \geq 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots \geq 0 \iff x \ \ldots \ \ldots\ldots$ et $f'(x) \leq 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots \leq 0 \iff x \ \ldots \ \ldots\ldots$
La fonction f est donc décroissante sur $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et croissante sur $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Lorsque les variations d'une fonction sont déduites du signe de sa dérivée, il est commode de résumer cela dans un tableau de variations dans lequel on ajoute une ligne pour ce signe.

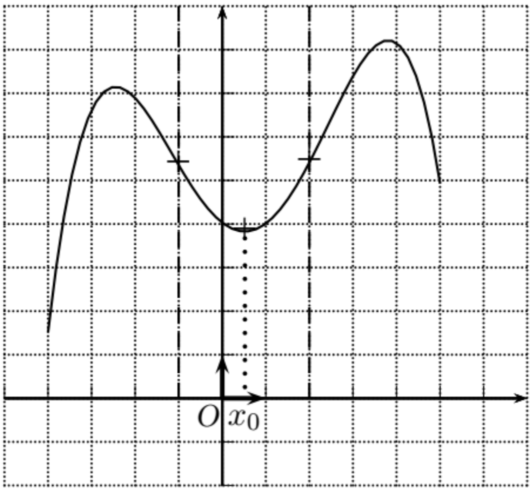
x	$-\infty$	$\ldots\ldots$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$f(x)$			

Remarque Pour étudier les variations d'une fonction, il n'est pas toujours nécessaire d'étudier le signe de la dérivée. Par exemple, soit $f(x) = \frac{1}{x-1}$. La fonction $x \mapsto x - 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Puis, la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. On aurait pu faire aussi autrement avec l'exemple précédent…

2.2 <u>Extremum d'une fonction</u>

Définition Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
(i) On dira que f admet un <u>maximum local</u> en $x_0 \in I$ s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, on ait $f(x) \leq f(x_0)$.
Cela signifie que « localement », au voisinage de x_0, la fonction f ne prend que des valeurs inférieures à $f(x_0)$.
(ii) On dira que f admet un <u>minimum local</u> en $x_0 \in I$ s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, on ait $f(x) \geq f(x_0)$.

Exemple



La fonction ci-dessus, représentée sur l'intervalle $I = [-4; 5]$, admet un minimum local en $x_0 = 0,5$.
On a alors, pour tout $x \in J =]-1; 2[$ par exemple, $f(x) \geq f(x_0)$.

Propriété Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I contenant a.
f' s'annule et change de signe en $a \iff f$ admet un extremum local en a.

Remarque Graphiquement, si f admet un extremum local en a, alors la tangente en a est une tangente horizontale (parallèle à l'axe des abscisses).

Exemple Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

f est dérivable sur $\ldots\ldots$ et pour tout $x \in \ldots\ldots$, on a $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
La dérivée est une fonction $\ldots\ldots\ldots\ldots$ $f'(x) = 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \iff x = \ldots\ldots\ldots$
On établit le tableau de signes de f'.

x	$-\infty$		$\ldots$		$+\infty$
$f'(x)$		$\ldots$	0	$\ldots$	

On constate que $f'(\ldots) = 0$ et que f' change de signe en $\ldots$
La fonction f admet donc un $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, atteint en $x = \ldots$, qui vaut $f(\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$..

Remarque On aurait pu utiliser les résultats du chapitre 2 pour trouver cet extremum.