Matrices de Wigner et loi du demi-cercle

Grand-Jacquot Xavier
Séminaire de Master 2 probabilités-statistiques,
Université de Rennes 1.
Sous la direction de Hing Yu.
xaviergrandjacquot@gmail.com

janvier 2010

1 Introduction

Une matrice de Wigner est une matrice symétrique (dans le cas comlexe) aléatoire. Les matrices de Wigner jouent un rôle important en physique nucléaire. D'une manière générale, la question du spectre de matrices de grande taille à entrées aléatoires a intéressé de nombreux physiciens, travaillant dans des branches aussi diverses de la physique. Aujourd'hui, ce pronlème apparaît aussi en traitement du signal appliqué aux télécommunications. Enfin, les matrices aléatoires posent aux mathématiciens des problèmes intéressants indépendament de leurs applications, dans lesquels des questions de probabilités sont liées à des problèmes :

- de théorie du potentiel
- d'analyse fonctionnelle, plus précisement d'algèbres d'opérateurs
- de théorie analytique des nombres
- de combinatoire

...

Supposons que $x_1, ..., x_n$ sont i.i.d et suivent la loi $\mathcal{N}(\mu, I_p)$. Alors, la covariance de la matrice est définie par :

$$S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(x_i - \overline{x})',$$

où

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Quand $n \to +\infty$, $S_n \longrightarrow I_p$ et $\sqrt{n}(S_n - I_p) \longrightarrow \sqrt{p}W_p$.
On peut voir que les éléments au-dessus de la diagonale de $\sqrt{p}W_p$ sont i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et les éléments de la diagonale sont i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,2)$.
Cette matrice est appelée matrice gaussienne (standard) ou matrice de Wigner.
On peut généraliser la définition d'une matrice de Wigner en demandant seulement à

la matrice d'être une matrice hermitienne aléatoire où les éléments sur ou au-dessus de la diagonale sont indépéndants.
L'étude de l'analyse du spectre en grande dimension des matrices de Wigner date de Wigner (1958) avec sa célèbre loi du demi-cecle. Il prouva que la distribution empirique du spectre de la matrice $n \times n$ gaussienne standard, normalisée par $\frac{1}{\sqrt{n}}$, tend vers la loi du demi-cercle F où la densité est donnée par :

$$\text{F'(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & \text{si } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cela a été étendue sous différents aspects. Grenander (1963) prouva que $\left\|F^{W_n} - F\right\|$ converge en probabilité vers 0, où :

$$F^A(x) = \frac{1}{n}\# \{k \leq n, \lambda_n \leq x\}$$

avec A : $n \times n$ matrice, $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A.

Arnold (1967,1971) prouva la convergence p.s . Plus tard, ce résultat fut généralisé. C'est ce que l'on va voir ici.
En fait, pour démontrer la loi du demi-cercle, on peut le faire par deux méthodes :
- soit par la méthode des moments
- soit par la transformée de Stieltjes.

Ici, ce que nous allons utiliser, c'est la transformée de Stieltjes.

2 Transformée de Stieltjes

Si $G(x)$ est une fonction à variations bornée sur l'axe des réels, alors la transformée de Stieltjes est définie par :

$$s_G(z) = \int \frac{1}{\lambda - z} dG(\lambda), z \in D,$$

où $z \in D \equiv \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$.

2.1 Propriétés élémentaires

Théorème 1 (Formule d'inversion)**.** *Pour tous points continuités $a < b$ de G, on a*

$$G\{[a,b]\} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \Im s_G(x + i\epsilon) dx. \tag{1}$$

Si G est considérée comme une mesure signée, alors le théorème précédent montre une correspondance unique entre les mesures signées et leurs transformées de Stieltjes.

Preuve : Notons que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_a^b \Im s_G(x+i\epsilon)dx &= \frac{1}{\pi}\int_a^b \int \frac{\epsilon dG(y)}{(x-y)^2+\epsilon^2}dx \\ &= \int \frac{1}{\pi}\left[\arctan(\epsilon^{-1}(b-y)) - \arctan(\epsilon^{-1}(a-y))\right]dG(y).\end{aligned}$$

Ensuite, on fait tendre ϵ vers 0 et on applique le théorème de convergence dominée. Ainsi, le membre de droite tend vers $G\,[a,b]$.

$\diamond$

L'importance de la transformée de Steltjes repose sur le théorème suivant :

Théorème 2. *Supposons que (G_n) est une suite de fonction à variation bornée avec $G_n(\infty) = 0$ pour tout n. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty} s_{G_n}(z) = s(z) \;\; \forall z \in D, \tag{2}$$

si et seulement si il existe une fonction à variation bornée G, avec $G(-\infty) = 0$, de transformée de Stieltjes $s(z)$ et tel que $G_n \longrightarrow G$ faiblement.

Preuve : Supposons que $G_n \to G$ faiblement, alors on a (2) par le théorèmede Helly-Bray (cf Loeve, 1977) puisque pour tout z fixé appartenant à D, les parties réelles et imaginaires de $\frac{1}{x-z}$ sont continues et tendent vers 0 quand $x \to +$ ou $-\infty$.
Maintenant, supposons que l'égailité (2) soit établie. Pour toute suite (G_n), par le théorème de selection de Helly, on peut choisir une sous-suite convergeant faiblement vers une mesure signée G. Par (2), et la partie suffisante du théorème, la transformée de G est $s(z)$. Alors, par le théorème 1, la limite d'une mesure signée est unique.

$\diamond$

Remarque 1. *En comparant avec la transformée de Fourier, un avantage de la transformée de Stieltjes est que l'on peut trouver facilement la fonction de densité d'une mesure signée.*

On a le théorème suivant :

Théorème 3. *Soit G une fonction à variation bornée et $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in D}} \Im s_G(z)$ existe. Appelons-là $\Im s_G(x_0)$.*
Alors, G est différentiable en x_0, et sa dérivée est $\frac{1}{\pi}\Im s_G(x_0)$.

La plupart du temps, on utilise la partie imaginaire de la transformée de Stieltjes. Cependant, nous avons souvent besoin d'estimer sa partie réel en fonction de sa partie imaginaire.
Présentons donc le résulat suivant :

Théorème 4. *Pour toute fonction de répartition F, sa transformée de Stieltjes $s(z)$ satisfait :*

$$|\Re s(z)| \leq v^{\frac{-1}{2}} \sqrt{\Im s(z)}$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} |\Re s(z)| &= \left| \int \frac{(x-u)dF(x)}{(x-u)^2+v^2} \right| \\ &\leq \int \frac{dF(x)}{\sqrt{(x-u)^2+v^2}} \\ &\leq (\int \frac{dF(x)}{(x-u)^2+v^2})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(Par Cauchy-Schwartz)

Donc, finalement, on obtient :

$$\Im(s(z)) = v \int \frac{dF(x)}{(x-u)^2+v^2}$$

Le théorème est donc montré.

$\diamond$

2.2 Inégalités de distance entre les lois en fonction de leur transformée de Stieltjes

Dégageons une méthode pour établir la vitesse de convergence de la loi du spectre des valeurs propres.

Théorème 5. *Soit F une fonction de répartition et soit G une fonction à variations bornées satisfaisant $\int |F(x) - G(x)|\, dx < \infty$. En notant leurs transformées de Stieltjes respectives $f(z)$ et $g(z)$, on a :*

$$\begin{aligned} \|F - G\| &:= \sup_x |F(x) - G(x)| \\ &\leq \frac{1}{\pi(2\gamma - 1)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z) - g(z)|\, du \right. \\ &+ \frac{1}{v} \sup_x \int_{|y| \leq 2va} |G(x+y) - G(x)|\, dy, \end{aligned}$$

où $z = u + iv$, $v > 0$, et a et γ sont des constantes telles que :

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \int_{|u|<a} \frac{1}{u^2+1} du > \frac{1}{2}.$$

Parfois, les fonctions F et G ont de petites queues de distribution ou ont toutes les deux des supports bornés. Dans certains cas, on peut établir la borne de $\|F-G\|$ au moyen d'intégrales sur un intervalle finie.

Théorème 6. *Sous les conditions du théorème précédent, on a :*

$$\|F-G\| \leq \frac{1}{\pi(1-\kappa)(2\gamma-1)} \left[\int_{-A}^{A} |f(z)-g(z)|\, du \right.$$
$$+ 2\pi v^{-1} \int_{|x|>B} |F(x)-G(x)|\, dx$$
$$v^{-1} \sup_x \int_{|y|\leq 2va} |G(x+y)-G(x)|\, dy,$$

où A et B sont des constantes positives tels que $A > B$ et

$$\kappa = \frac{4B}{\pi(A-B)(2\gamma-1)} < 1.$$

Preuve : Notons $\Delta = \sup_x |F(x)-G(x)|$.
On a

$$\begin{aligned}
\int_A^{\infty} |f(z)-g(z)|\, du & \\
&= \int_A^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F(x)-G(x))dx}{(x-z)^2} \right| du \\
&\leq \int_A^{\infty} \left| \int_{-B}^{B} \frac{(F(x)-G(x))dx}{(x-z)^2} \right| du + \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{|x|>B} \frac{(F(x)-G(x))dx}{(x-z)^2} \right| du \\
&\leq 2B\Delta \int_A^{\infty} \frac{du}{(u-B)^2+v^2} + \pi v^{-1} \int_{|x|>B} |F(x)-G(x)|\, dx \\
&\leq 2B\Delta/(A-B) + \pi v^{-1} \int_{|x|>B} |F(x)-G(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient la même borne pour $\int_{-\infty}^{-A} |f(z)-g(z)|\, du$

$\diamond$

3 Loi du demi-cercle par la transformée de Stieltjes

Théorème 7. *Supposons que $W_n = \frac{1}{\sqrt{n}} X_n$ est une matrice de Wigner, les éléments au-dessus ou sur la diagonale de X_n sont indépendants mais peuvent être dépendants de n et ne pas être nécessairement identiquement distribués. Supposons que les éléments*

de X_n ont pour moyenne 0 et variance 1 et satisfont la condition suivante :
$\forall \eta > 0$ ($\eta \in \mathbb{R}$),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j,k} \mathbb{E} \left| x_{jk}^{(n)} \right|^2 I_{\left(\left| x_{jk}^{(n)} \right| \geq \eta\sqrt{n}\right)} = 0 \qquad (3)$$

Alors, la loi du spectre empirique de W_n converge vers la loi du demi-cercle p.s.

Le but de cette section est de démontrer ce théorème en utilisant les outils que l'on a introduit précedemment.

3.1 Transformée de Stieltjes de la loi du demi-cercle

Soit $z = u + iv$ avec $v > 0$ et $s(z)$ la transformée de Stieltjes de la loi du demi-cercle. Alors, on a :

$$s(z) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-2\sigma}^{2\sigma} \frac{1}{x - z} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} dx$$

Posons $x = 2\sigma \cos y$, alors :

$$\begin{aligned}
s(z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2\sigma \cos y - z} \sin^2 y dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sigma \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} - z} (\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i})^2 dy \\
&= -\frac{1}{4i\pi} \oint_{|\xi|=1} \frac{1}{\sigma(\xi + \xi^{-1}) - z} (\xi - \xi^1)^2 \xi^{-1} d\xi \\
&= -\frac{1}{4i\pi} \oint_{|\xi|=1} \frac{(\xi^2 - 1)^2}{\xi^2(\sigma\xi^2 + \sigma - z\xi)} d\xi
\end{aligned}$$

(en posant $\xi = e^{iy}$ à la troisième ligne)

On va utiliser le théorème des résidus pour évaluer l'intégrale. Notons que l'intégrande a 3 pôles en $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = \frac{z+\sqrt{z^2-4\sigma^2}}{2\sigma}$ et $\xi_2 = \frac{z-\sqrt{z^2-4\sigma^2}}{2\sigma}$.

$$\sqrt{z} = (Imz) \frac{|z| + z}{\sqrt{2(|z| + \Re z)}}$$

ou

$$\Re(\sqrt{(z)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} sgn(\Im z) \sqrt{|z| + \Re z} = \frac{\Im z}{\sqrt{2(z - \Re z)}}$$

et

$$\Im(\sqrt{(z)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|z| - \Re z} = \frac{|\Im z|}{\sqrt{2(|z| + \Re z)}}$$

Cela montre que la partie réelle de $\sqrt{z}$ a le même signe que la partie immaginaire de z. En appliquant ceci à $\xi_{1,2}$, on trouve que la partie réelle de $\sqrt{z^2 - 4\sigma^2}$ a la même que celle de la partie immaginaire de z, ce qui implique $|\xi_1| > |\xi_2|$. Puisque $\xi_1\xi_2 = 1$, on conclut que $|\xi_2| < 1$ et alors les 2 pôles ξ_0 et $\xi_{1,2}$ de l'intégrande sont dans le disque de rayon $|z| \leq 1$. Par un calcul simple, on trouve que les résidus de ces deux pôles sont :

$$\frac{z}{\sigma^2}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{(\xi_2-1)^2}{\sigma\xi_2^2(\xi_1-\xi_2)} &= \sigma^{-1}(\xi_2-\xi_1)\\ &= -\sigma^{-2}\sqrt{z^2-4\sigma^2}\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient que :

$$s(z) = -\frac{1}{2\sigma^2}(z - \sqrt{z^2-4\sigma^2})$$

3.2 Preuve du théorème 7

On suppose que :
i) Pour $i \neq j$, $|x_{ij}| \leq \eta_n\sqrt{n}$ et $x_{ii} = 0$;
ii) Pour $i \neq j$, $\mathcal{E}(x_{ij}) = 0$, $\mathbb{E}(|x_{ij}|^2) = \sigma^2$;
iii) Les variables $x_{ij}, i < j$ sont indépendantes.
Pour simplifier , on supposera que dans la suite que $\sigma^2 = 1$.
Par définition, la transformée de Stieltjes de F^{W_n} est donnée par :

$$s_n(z) = \frac{1}{n}tr(W_n - zI_n)^{-1} \tag{4}$$

La preuve du théorème 7 va se faire en trois étapes :

- **Etape** 1 **:** Pour tout z fixé appartenant à $\mathbb{C}^+ = \{z, \Im(z) > 0\}$, $s_n(z) - \mathbb{E}s_n(z) \longrightarrow 0$ p.s .
- **Etape** 2 **:** Pour tout z fixé appartenant à $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{E}s_n(z) \longrightarrow s(z)$, où $s(z)$ est la transformée de Stieltjes de la loi du demi-cercle.
- **Etape** 3 **:** En dehors d'un ensemble vide, $s_n(z) \longrightarrow s(z), \forall z \in \mathbb{C}^+$

D'où en appliquant le théorème 1.2, cela montrera que en dehors d'un ensemble vide, $F^{W_n} \longrightarrow F$ faiblement.

3.2.1 Etape 1 : Convergence p.s

Nous allons montrer que :pour chaque z fixé appartenant à $\mathbb{C}^+$,

$$s_n(z) - \mathbb{E}(s_n(z)) \longrightarrow 0 p.s \tag{5}$$

Pour ce faire, nous avons besoin d'étendre l'inégalité de Burkholder :

Lemme 1. *Soit (X_k) une suite complexe de martingales $\mathcal{F}_k$-mesurable, avec $\mathcal{F}_k$ σ-tribu croissante. Alors pour $p > 1$,*

$$\mathbb{E}\left|\sum X_k\right|^p \leq K_p \mathbb{E}(\sum |X_k|^2)^{\frac{p}{2}}$$

Preuve :
Burkolder (1973) prouva le lemme pour des martingales réelles $(\Re X_k)$ et $(\Im X_k)$ qui sont des suites de martingales.
Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\sum X_k\right|^p &\leq C_p(\mathbb{E}\left|\sum \Re X_k\right|^p + \mathbb{E}\left|\sum \Re X_k\right|^p) \\
&\leq C_p(K_p \mathbb{E}(|\sum |\Re X_k|^2)^{\frac{p}{2}} + K_p \mathbb{E}(|\sum |\Im X_k|^2)^{\frac{p}{2}}) \\
&\leq 2 C_p K_p \mathbb{E}(\sum |X_k|^2)^{\frac{p}{2}},
\end{aligned}$$

où $C_p = 2^{p-1}$ et le lemme est prouvé.

$\diamond$