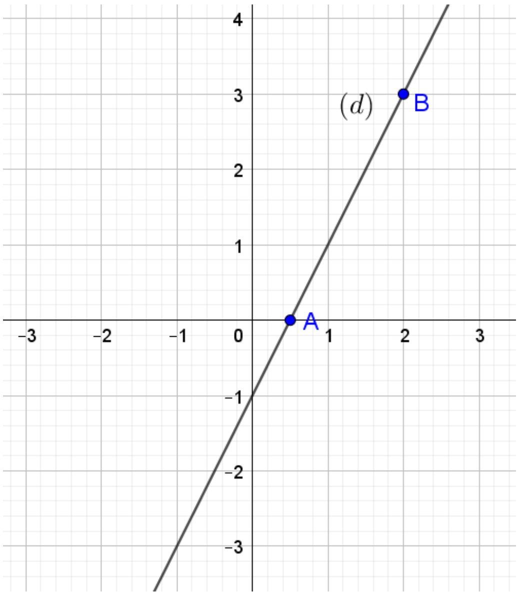
On considérera dans la suite, une fonction f définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$.

I Quelques rappels sur les équations de droites

Propriété Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est caractérisée par une équation de la forme $y = mx + p$. Le réel m appelé coefficient directeur et le réel p est appelé ordonnée à l'origine.

Exemple Soit la droite (d) d'équation $y = 2x - 1$. Le point $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ appartient à (d) car $2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$. Par contre le point $B(-2; -3)$ n'appartient à (d) puisque $2 \times (-2) - 1 = -5 \neq -3$.

La représentation graphique de (d) est obtenue en plaçant au préalable deux points. En choisissant une abscisse x, l'ordonnée y est obtenue à l'aide de l'équation $y = 2x - 1$.



Propriété Soit une droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points appartenant à la droite (d). Alors le coefficient directeur m de (d) vérifie la relation suivante :

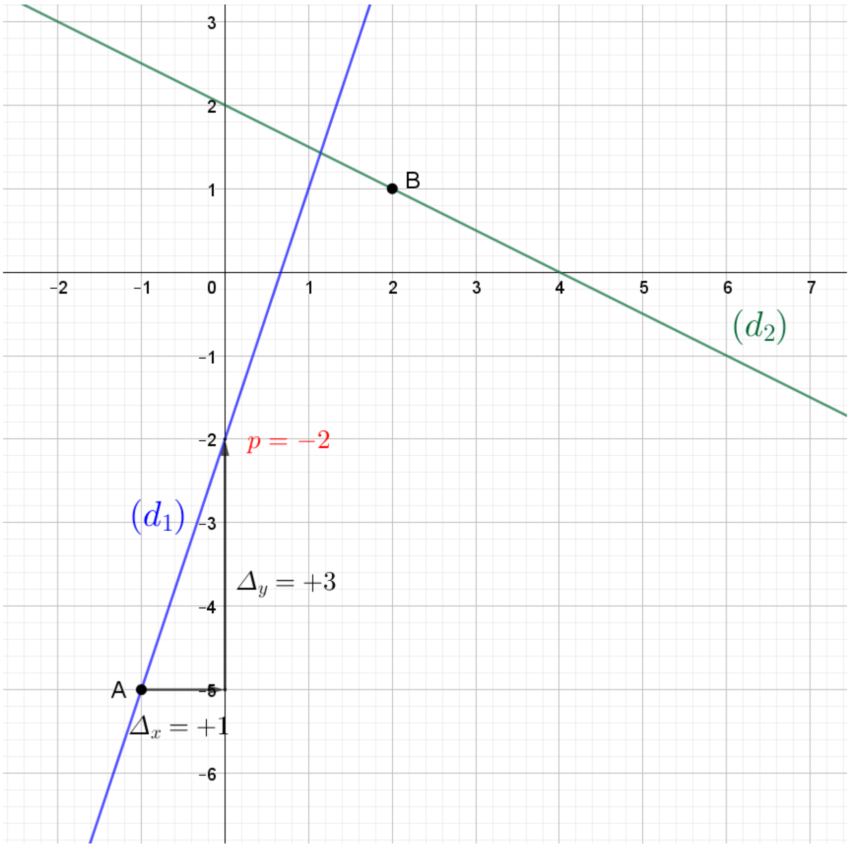
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \left(\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}\right)$$

Exemple Soit la droite (d) passant par les points $A(2; 3)$ et $B(6; 5)$.

Tout d'abord, on a $m = \frac{5-3}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. D'où $(d) : y = \frac{1}{2}x + p$. On a $y_A = \frac{1}{2}x_A + p$ soit $3 = \frac{1}{2}2 + p \Leftrightarrow p = 2$.

Donc $(d) : y = \frac{1}{2}x + 2$.

Méthode graphique pour déterminer une équation de droite



1) Droite (d_1) : son coefficient directeur $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+3}{+1} = 3$ et son ordonnée à l'origine est $p = -2$. D'où

$(d_1): y = 3x - 2$.

2) Droite (d_2) : son coefficient directeur $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+1}{-2} = -\frac{1}{2}$ et son ordonnée à l'origine est $p = 2$. D'où

$(d_1): y = -\frac{1}{2}x + 2$.

II Nombre dérivé d'une fonction en un point

2.1 Taux d'accroissement de f entre a et $a + h$

Définition On appelle taux d'accroissement ou taux de variation de f entre deux nombres a et $a + h$ (appartenant à I), avec $h \neq 0$; noté $\tau_{a,h}$:

$$\tau_{a,h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

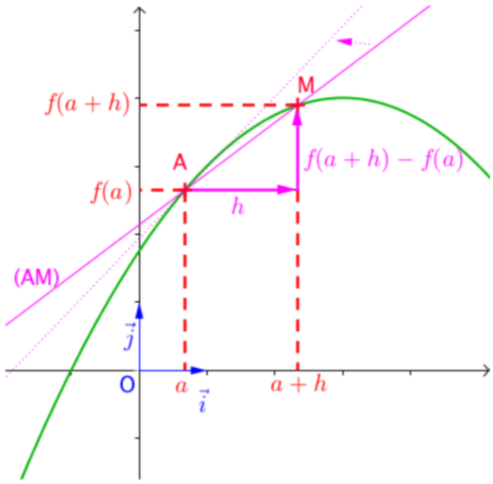
Remarque Quand $h = 0$, le taux d'accroissement n'existe pas.

Exemple Soit $f(x) = x^2$, calculer le taux d'accroissement entre 1 et $1 + h$:

$\tau_{1,h} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2 + h$.

Interprétation graphique A et M sont les points de la courbe représentative d'une fonction f d'abscisses respectives a et $a+h$. Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, $\tau_{a,h}$, est le coefficient directeur de la droite (AM), soit :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \tau_{a,h}$$



2.2 Introduction à la limite d'une fonction sur deux exemples

Exemple 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \frac{(x+1)^2-1}{x}$.
L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0.1	-0.01	-0.001	…	0.001	0.01	0.1	0.5
$f(x)$	1.5	1.9	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.1	2.5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0. On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ ou aussi $f(x) \underset{x \to 0}{\rightarrow} 2$.

Exemple 2 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$
A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0. On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note :$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$ ou aussi $g(x) \underset{x \to 0}{\rightarrow} +\infty$.

2.2 Définition

Définition Soit a et $(a+h)$ appartenant à I. Dire que f est dérivable en a signifie que le taux d'accroissement entre a et $a+h$, $\tau_{a,h}$, tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.
Ce nombre L est appelé nombre dérivé de f en a. Il est noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau_{a,h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$

Exemple 1 Soit $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $a = 2$.

La méthode est la suivante : on calcule d'abord le taux d'accroissement $\tau_{a,h}$ puis on passe à la limite. Si cette limite est un nombre L alors cette fonction est dérivable en a et $L = f'(a)$.

1) On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$.

$= \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - 2^2 - 2\times 2 + 3}{h}$

$= \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 8}{h}$

$= \frac{6h + h^2}{h} = h + 6$

Donc : $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} h + 6 = 6$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$. Le nombre dérivé de f en 2 vaut 6.

Exemple 2 Soit $g(x) = \sqrt{x-1}$ et $a = 1$.

$$\tau_{1,h} = \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Or, $\lim_{h\to 0} \tau_{1,h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$. Comme la limite n'est pas un nombre, on conclut que g n'est pas dérivable en 1.

III Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Définition *Tangente à une courbe*
On appelle tangente à une courbe C en un point A, appartenant à C, une droite passant par A et qui, si elle existe, est aux alentours de A la droite la plus proche de C.

Soit C la courbe représentative de la fonction f et $A(a\,;f(a))$ et $M(a+h\,;f(a+h))$, deux points de cette courbe.

On a vu que le coefficient directeur de la droite (AM) (sécante à la courbe) est la quantité $\tau_{a,h}$.

Lorsque h tend vers 0, la droite (AM) *tend* vers la tangente à la courbe au point A et le nombre $\tau_{a,h}$ tend vers le coefficient directeur de la tangente en A.

On a donc la propriété suivante :

Propriété Soit f dérivable en $a \in I$ et C_f la courbe représentative de f.
(i) Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.
(ii) L'équation de la tangente au point $A(a\,;f(a))$ est la suivante : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Démonstration (i) admis

(ii) En exercice

Remarque Le point A appartient à la fois à la courbe de f et à la tangente. On dit que c'est le point de contact au point d'abscisse a.

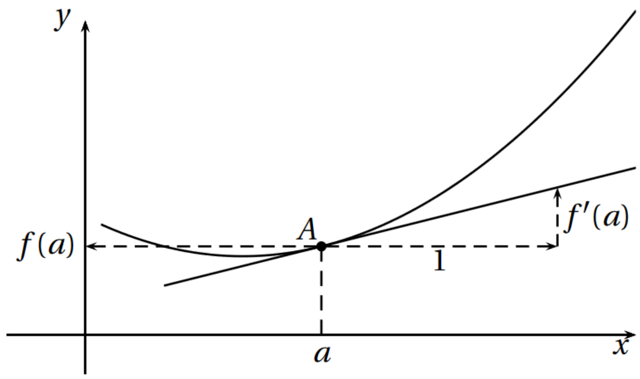


Figure : Interprétation graphique du nombre dérivé

Exemples 1) Soit $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $A(2\,;f(2))$. Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point A.

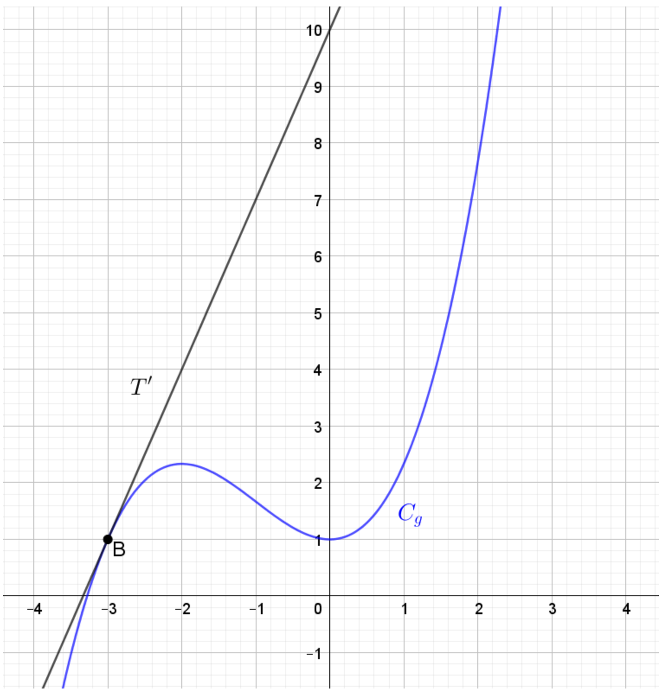
Tout d'abord on $T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

On a vu précédemment que $f'(2) = 6$ et on a $f(2) = 4 + 4 - 3 = 5$.

Soit $y = 6(x-2) + 5 = 6x - 12 + 5 = 6x - 7$.

L'équation de la tangente T à C_f au point A est $T : y = 6x - 7$.

2) Déterminer graphiquement l'équation de la tangente T' à la courbe C_g au point B.



Tout d'abord, l'équation de (T') est de la forme $y = mx + p$.

On a $m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{+3}{+1} = 3$ et $p = 10$. Donc $(T') : y = 3x + 10$.

IV Fonction dérivée d'une fonction f

4.1 Définition

Un exemple pour comprendre

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.
Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau_{a,h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2ah+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2a + h = 2a.$$

Pour tout nombre a , on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $2a$.
On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 2x$.
Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'.

Remarque Le réel $f'(x)$ est le coefficient directeur (ou pente) de la tangente au point $M(x\,; f(x))$ de C.

Un peu d'histoire des mathématiques

Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau » a été introduit par le mathématicien franco-italien Joseph Louis Lagrange (1736-1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de « provenir ») d'une autre fonction.

4.2 Fonctions dérivées des fonctions de référence

On a le tableau suivant **à connaître par cœur !**

Fonction f	**Fonction dérivée f'**	**f est dérivable sur**
$f(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	

Exemple Déterminer le nombre dérivé de la fonction cube en -2.

On a $f(x) = x^3$ soit $f'(x) = 3x^2$ et donc $f'(-2) = 12$.

Remarque Toutes ces formules se démontrent, le faire en exercice !

4.3 Opérations sur les fonctions dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.

On a le tableau suivant, **à connaître par cœur !**

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
ku où $k \in \mathbb{R}$	ku'

Exemples 1) Soit $f(x) = 2x^2$, alors $f'(x) = 2 \times 2x = 4x$.

2) Soit $g(x) = 4x^3 + \frac{1}{2}x^2$, alors $g'(x) = 12x^2 + x$

Remarque De manière générale, pour dériver un polynôme de degré 2 ou 3, il suffit dériver chaque terme.

V Applications de la fonction dérivée

5.1 Lien entre signe de la fonction dérivée et sens de variation

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse x est la droite la plus proche à la courbe au voisinage du point de la courbe d'abscisse x. Il est naturel de penser que lorsque la tangente « monte », la courbe « monte » et quel lorsque la tangente « descend », la courbe « descend », et réciproquement. Ou, plus mathématiquement, lorsque la fonction affine dont la tangente est la représentation graphique est croissante (respectivement décroissante), f est aussi croissante (respectivement décroissante) et réciproquement. Or, la croissance et la décroissance d'une fonction affine dépendent du signe de son coefficient directeur, ici $f'(x)$. Ainsi, étudier les variations de f revient donc à étudier le signe de sa fonction dérivée selon les valeurs de x.

On admettra la propriété suivante (qui est attribuée à Joseph-Louis Lagrange) :

Propriété Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I. On a les équivalences suivantes :
(i) Pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0 \iff f$ est croissante sur I.
(ii) Pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0 \iff f$ est décroissante sur I.
(iii) Pour tout réel x de I, $f'(x) = 0 \iff f$ est constante sur I.

Remarques 1) Dans les cas où les inégalités seraient strictes pour tout réel x de I, alors f serait strictement croissante ou décroissante sur I.

2) On dit qu'une fonction est monotone sur un intervalle lorsqu'elle est partout croissante ou bien partout décroissante sur cet intervalle.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 8$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$
$f'(x) \geq 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots \geq 0 \iff x \ \ldots \ \ldots\ldots$ et $f'(x) \leq 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots \leq 0 \iff x \ \ldots \ \ldots\ldots$

La fonction f est donc décroissante sur $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et croissante sur $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Lorsque les variations d'une fonction sont déduites du signe de sa dérivée, il est commode de résumer cela dans un tableau de variations dans lequel on ajoute une ligne pour ce signe.

x	$-\infty$ $\quad\ldots\ldots\quad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$
$f(x)$	

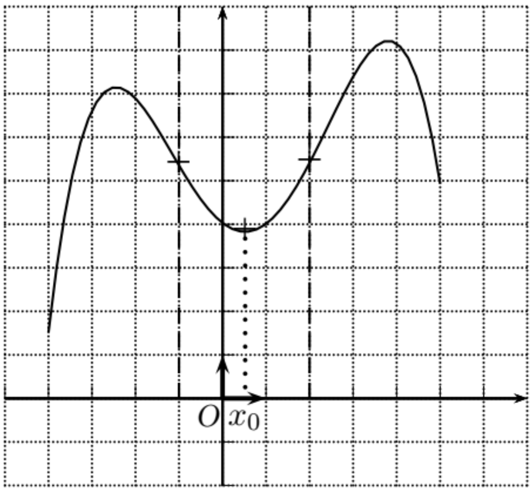
5.2 Extremum d'une fonction

Propriété Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I contenant a.
f' s'annule et change de signe en x_0 $\Leftrightarrow$ f admet un extremum local en x_0.

Remarques 1) Graphiquement, si f admet un extremum local en a, alors la tangente en a est une tangente horizontale (parallèle à l'axe des abscisses).

2) On distingue extremum global d'extremum local. Un extremum global est la plus petite ou la plus grande valeur atteinte par la fonction sur l'intervalle I.

Exemples 1) Sur un graphe :



La fonction ci-dessus, représentée sur l'intervalle $I = [-4; 5]$, admet un minimum local en $x_0 = 0,5$.
On a alors, pour tout $x \in J =]-1; 2[$ par exemple, $f(x) \geq f(x_0)$.

2) Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

f est dérivable sur $\ldots\ldots$ et pour tout $x \in \ldots\ldots$, on a $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
La dérivée est une fonction $\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad f'(x) = 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \iff x = \ldots\ldots\ldots$
On établit le tableau de signes de f'.

x	$-\infty$ $\quad\ldots\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\ldots \quad 0 \quad \ldots$

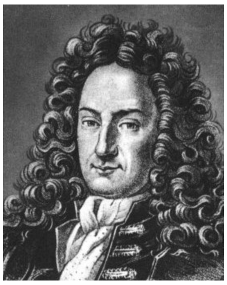
On constate que $f'(\ldots) = 0$ et que f' change de signe en $\ldots$
La fonction f admet donc un $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, atteint en $x = \ldots$, qui vaut $f(\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Histoire des mathématiques

A. Calcul infinitésimal

De nombreuses spécialités scientifiques étudient les objets en mouvement et leur changement au cours du temps. Par exemple, lorsqu'une balle dévale une pente, sa position change. La vitesse de la balle est le taux du changement de sa position. Bien sûr, cela peut se modifier. On appelle accélération le taux du changement de la vitesse. La question est la suivante :si vous avez une formule mathématique décrivant la position de la balle, pouvez-vous calculer sa vitesse et son accélération ? Le problème géométrique démarre avec une ligne courbe sur le plan et détermine comment est l'inclinaison en tout point donné. Si la courbe est un graphique de la position de la balle contre le temps, alors sa pente représente la vitesse de la balle. Ceci avait été compris dès l'époque d'Archimède, mais on ne connaissait alors que des méthodes approximatives pour la calculer. A la fin du XVIIème siècle, Isaac Newton et Gottfried Leibniz développèrent chacun de leur côté le calcul infinitésimal, un ensemble magnifique de règles décrivant la pente des graphiques et les idées qui y sont reliées. Ce sujet se divisait en deux branches. En partant d'une courbe, un calcul infinitésimal différentiel vous donnera la sa pente. Un calcul infinitésimal intégral décrit la zone bloquée au-dessous d'elle (ce que vous verrez l'année prochaine). Cependant, il s'agit de deux procédés opposés.

B. Biographie de Gottfried Leibniz



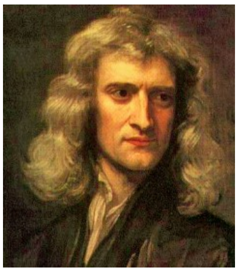
Né le 1er juillet 1644 à Leipzig et mort le 14 novembre 1716 à Hanovre.

Il est le fils d'un professeur de philosophie morale de l'université de Leipzig. Dès l'âge de 6 ans, il campe dans la bibliothèque paternelle et devient un lecteur assidu. Il entre à 15 ans l'université, où il étudie la philosophie, la théologie et de droit. Il ne fait pas de mathématiques si l'on excepte sa découverte de l'œuvre d'Euclide lors d'un bref passage à l'université de Iena. Une fois son doctorat de droit en poche, Leibniz se met au service de l'électeur de Mayence, puis du prince de Hanovre, dans un poste de nature diplomatique. On l'envoie en mission en France, et se lie d'amitié avec Huygens. Il approfondit son étude des mathématiques. En 1673, lors d'un voyage à Londres, il rencontre des mathématiciens anglais et il est admis à la Royal Society. Newton l'accusera plus tard d'avoir lu son manuscrit sur la découverte du calcul différentiel, et une grande querelle de préséance surgira bientôt entre les deux hommes. Leibniz se rend aussi à La Haye, où il rencontre Spinoza, et à Delft, où il fait connaissance de Leeuwenhoek. En 1676, il doit rentrer en Allemagne. Il fonde en 1682 la revue Acta Eruditorum qui lui permet de diffuser ses découvertes, mais aussi ses notations, et de rester en contact avec les frères Bernoulli. En 1700, il fonde l'Académie de Berlin dont il devient le 1er président. La fin de sa vie est assombrie par sa querelle avec Newton et sa relative disgrâce auprès des souverains de Hanovre.
Il meurt dans la solitude et son secrétaire, seul, assistera à ses funérailles.
De nombreuses idées de Leibniz préfigurent la théorie de la pensée moderne en physique, technologie, biologie, médecine, géologie, psychologie, linguistique, politique, loi, théologie, histoire, philosophie et mathématiques. Il améliora la machine à calculer de Pascal, développa la théorie binaire qui était la technologie numérique moderne, développa ce que nous connaissons sous le nom d'algèbre de Boole et la logique symbolique. Désirant être abordable, il est le plus grand créateur de notations. Il introduit le d, abréviation de différence, pour la différentiation, ainsi que la notation $\frac{df}{da}(= f'(a))$, le symbole $\int$ –c'est le s de l'époque, première lettre du mot latin *summa* (somme), pour l'intégration. Il utilise systématiquement le point pour la multiplication et les deux points (:) pour la division. C'est grâce à lui et à Newton que le signe $=$ se généralise. Il est, de plus, le premier à utiliser le terme de *fonction*.

Œuvres

- *Dissertatio de arte combinatoria (1666)*
- *Essais de théodicée (1710)*

C. Biographie de Isaac Newton



Né en 1642 à Woolsthorpe et mort en 1727 à Kensington.

Isaac Newton, enfant chétif, distrait en classe, fait partie des élèves médiocres de l'école de Grantham. Il s'intéresse à la mécanique, écrit des vers et dessine. Par la suite, ses aptitudes se révèlent et on l'envoie en 1660 au Trinity College de Cambridge, où il obtient son diplôme en 1664. Une épidémie de peste oblige le collège à fermer et Newton se réfugie à Woolsthorpe. Les deux années qui suivent sont les plus fécondes de sa production mathématique, mais elle restera manuscrite. Lorsqu'il pourra la faire publier, la qualité de ses découvertes étant reconnue, il se passionnera pour l'alchimie. En 1669, son maître Barrow lui cède sa chaire de mathématiques à Cambridge. Ses travaux scientifiques concernent alors principalement la physique : l'optique, et surtout la théorie de la gravitation. Halley, impressionné par l'importance de ses découvertes, le pousse à les publier. Newton se met alors à la tâche et fait paraître ses *Principia*. Le monde scientifique se rend vite compte de l'importance de cette œuvre. La réputation de Newton est faite : il est comblé d'honneurs.
La fin de sa vie est improductive au niveau scientifique. Atteint d'une dépression nerveuse en 1693, il quitte Cambridge. En 1703, il devient président de la Royal Society, poste qu'il conservera jusqu'à sa mort. Il est anobli par la reine Anne en 1705. Newton est considéré comme le fondateur, avec Leibniz du calcul différentiel et intégral. Ses travaux portent aussi sur les fonctions et sur les courbes. Il se passionne pour la théologie, et polémique pour établir la prééminence de ses travaux sur ceux de Leibniz. Il paraît maintenant certain que les œuvres des deux hommes ont été conçues indépendamment, celle de Newton précédant d'une dizaine d'années celle de Leibniz, mais ce dernier en donne une formulation plus explicite et mieux exploitable. Malheureusement, cette querelle divise le continent et l'Angleterre, où les mathématiques vont stagner un siècle durant. Newton note les dérivées par un point situé au-dessus ($\dot{x}$). Son œuvre en physique est fondamentale : découverte de la nature de la lumière blanche, de la gravitation universelle.

Œuvres

Enumeratio curvarum trium dimensionum (1667, non publié)
De methodis serierum et fluxionem (1671, non publié)
De analysi (1669, non publié)
Philosophiae naturalibus Principia mathematica (1687)
*Opticks (*1704)
Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione (1707)
The chronology of Ancient Kingdoms Amended (1728)
Observations upon the Proheticies of Daniel and the Apocalypse of St John (1733)

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$