Exercice 1 *Un problème de Sophie Germain*

1. Soit n un entier naturel, on a $(n^2+2)^2 = n^4 + 4n^2 + 4$ ce qui équivaut à dire que :

$n^4 + 4 = (n^2+2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.

2. D'après la question précédente, on a :

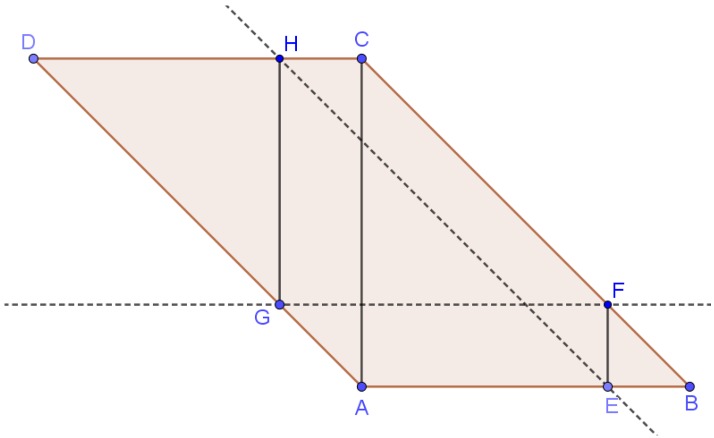
$2017^4 + 4 = (2017^2 - 2 \times 2017 + 2)(2017^2 + 2 \times 2017 + 2) = 4064257 \times 4072325$.

Ainsi $2017^4 + 4$ est non premier puisqu'il admet d'autres diviseurs autres que 1 et lui-même.

3. On constate que $83525 = 83521 + 4 = 17^2 + 4 = (17^2 - 2 \times 17 + 2)(17^2 + 2 \times 17 + 2) = 325 \times 257$.
Et l'on a $325 = 5^2 \times 13$ et 257 est un nombre premier.
On a donc la décomposition en facteurs premiers suivante : $83525 = 5^2 \times 13 \times 257$.

Exercice 2 *Points variables sur un parallélogramme*

1. Ci-dessous la figure pour $k = \frac{3}{4}$.



2. Tout d'abord **montrons que les droites (EF) et (AC) sont parallèles**. On a :

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} - k\overrightarrow{AB} = (1-k)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$.

Nous savons que les droites (AB) et (GF) sont parallèles, ainsi que les droites (AG) et (BF). Il en résulte que le quadrilatère ABFG est un parallélogramme. D'où $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AG} = (1-k)\overrightarrow{AD}$.

On en déduit que $\overrightarrow{EF} = (1-k)\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AD} = (1-k)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = (1-k)\overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, **on a donc que les droites (EF) et (AC) sont parallèles**.

Ensuite, **prouvons de la même façon que les droites (GH) et (AC) sont parallèles.** On a :

$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} - (1-k)\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$.

Nous savons que les droites (AD) et (EH) sont parallèles, ainsi que les droites (AE) et (DH). Il en résulte que le quadrilatère AEHD est un parallélogramme. D'où $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que $\overrightarrow{GH} = k\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{AB} = k\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) = k\overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{GH}\ et\ \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, **on a donc que les droites (GH) et (AC) sont parallèles**.

De plus, comme (GH) et (AC) sont parallèles ainsi que (EF) et (AC), cela implique que **les droites (GH) et (EF) sont parallèles.**

On conclut que les droites (EF) , (GH) et (AC) sont parallèles.

<u>Exercice 3</u>

Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{TS}\ et\ \overrightarrow{SM}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}\ et\ \overrightarrow{AC}$.

- $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BS} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{BA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{35}\overrightarrow{AC}$.

- $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + a\overrightarrow{AB} = -a\overrightarrow{BA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

Pour que les points S,T et M soient alignés, il faut que les vecteurs $\overrightarrow{TS}\ et\ \overrightarrow{SM}$ soient colinéaires. Il existe donc k un réel non nul tel que $\overrightarrow{SM} = k\overrightarrow{TS}$.

D'où : $-\frac{1}{35} \times k = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow k = \frac{2\times 35}{5} = 14$.

Soit encore : $\frac{4}{7} \times k = -a \Leftrightarrow -\frac{4}{7} \times 14 = a$; d'où $a = -8$.