Un peu d'histoire des maths

En 1654, Blaise Pascal (1623-1662) entretient avec Pierre de Fermat (1601-1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités. Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme par exemple celui du Chevalier de Méré : *« Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »*
Pierre de Fermat fut philologue (spécialiste de langage à partir de documents écrits), administrateur puis Conseiller du Roi au Parlement de Toulouse (l'équivalent d'une cour de justice), il restera dans la mémoire des hommes comme un des plus grands mathématiciens du 17è siècle. Il fut un des artisans fondateurs de l'Académie des sciences qui vit officiellement le jour un an après sa mort. En même temps que Roberval et Descartes, Fermat pose les principes de la géométrie analytique (1636) en étudiant des courbes par le biais d'une équation et se querelle avec ce dernier sur les problèmes de tangence aux courbes (on parlait à l'époque de *touchante* plutôt que de *tangente*), point de départ de la notion de nombre dérivé et du calcul différentiel et intégral, car il exposa aussi, vers 1638-40, des méthodes de quadrature (calcul d'aires) proches de l'intégrale de Riemann concernant en particulier la parabole, l'hyperbole, la cissoïde, la spirale d'Archimède. Reprenant les travaux de Diophante d'Alexandrie, traduits et complétés par Bachet de Méziriac, il redora le blason de l'arithmétique en créant *la théorie des nombres*. De nombreux résultats sont attachés à son nom. Fermat s'intéressa aussi aux sciences de la nature : principe de Fermat (optique). Les œuvres de Fermat furent éditées par son fils Samuel : *Varia opera mathematica* (Toulouse, 1679). Cependant, Fermat ne fit pas état de toutes ses découvertes, encore moins de ses rarissimes démonstrations et on estime perdu un certain nombre de ses recherches arithmétiques.

I Expériences aléatoire à deux épreuves

Déjà vu en classe

II Variable aléatoire discrète

2.1 Définition

Définition Soit Ω un univers et P une loi de probabilité sur Ω.
On définit une variable aléatoire X sur Ω en associant un nombre réel à chaque événement élémentaire de Ω. Une variable aléatoire est donc une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
Plus précisément, si $\{x_1; x_2; \dots, x_n\} = X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X sur Ω (ou appelé univers image) alors, pour tout entier i compris entre 1 et n, l'événement «X prend la valeur x_i » est noté « $\{X = x_i\}$ ». Sa probabilité $P(X = x_i)$ (on note aussi : $P(\{X = x_i\})$) est la probabilité de l'ensemble des issues ayant pour image x_i par X.

Notation Une variable aléatoire est généralement notée X, Y, Z ,…

Exemples et contre-exemple

1) Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à 6 faces non truqué et on regarde le résultat ». L'ensemble de toutes les issues possibles est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$, c'est l'univers.
On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €,
- si le résultat est 1, on gagne 3 €,
- si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur Ω qui prend les valeurs 2, 3 et -4. D'où $X(\Omega) = \{-4 ; 2 ; 3\}$.
L'événement $\{X = 2\}$ correspond aux issues : 2, 4 ou 6. L'événement $\{X = 3\}$ correspond à l'issue 1. L'événement

$\{X = -4\}$ correspond aux issues 3 et 5. Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité et il y a 6 issues possibles, on a donc $P(X = 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ car il y a 3 issues réalisant l'événement $\{X = 2\}$.

2) On lance deux fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré. Une issue de l'expérience aléatoire est un couple $(x; y)$ où x est le résultat du 1er lancer et y le lance du 2ème lancer.

L'univers associé à cette expérience aléatoire contient 36 issues. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque couple (x, y) associe la somme $x + y$. On représente la situation à l'aide d'un tableau à double entrée :

Premier lancer \ Deuxième lancer	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$X(\Omega) = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.
$\{X = 10\} = \{(4; 6), (5; 5), (6; 4)\}$.
On veut calculer la probabilité de l'événement : $\{X=10\}$.
On est en situation d'équiprobabilité, il y a 36 issues possibles, $\{X = 10\}$ contient 3 issues donc : $P(\{X = 10\}) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

2) Voici un contre-exemple : associer au tirage d'une boule dans une urne la couleur de la boule tirée ne définit **PAS une variable aléatoire** car la couleur n'est pas un nombre.

2.2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Passons maintenant à la définition de la loi de probabilité d'une **va** (abréviation de Variable Aléatoire) :

Définition Lorsque, à chaque valeur de x_i de $X(\Omega)$, on associe la probabilité $P(X = x_i)$, on définit sur l'univers $X(\Omega)$ une loi de probabilité appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Remarques Soit X une variable aléatoire prenant les valeur $x_1; \dots; x_n$.

1) On peut représenter la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	…	x_n
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	…	$P(X = x_n)$

2) On a la propriété importante en notant $P(X = x_i) = p_i$:
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Exemples 1) Reprenons l'exemple 1) précédent.
On a $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ et $P(X = -4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.
D'où le tableau de la loi de probabilité de la va X :

x_i	-4	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

On peut vérifier que $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

2) Reprenons l'exemple 2) précédent.
On obtient le tableau de la loi de probabilité de la va X :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\{X=x_i\}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On veut calculer la probabilité d'obtenir un résultat au moins égal à 10.

$$\begin{aligned} P(\{X \geqslant 10\}) &= P(\{X=10\} \cup \{X=11\} \cup \{X=12\}) \\ &= P(\{X=10\}) + P(\{X=11\}) + P(\{X=12\}) \\ &= \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(les événements $\{X = x_i\}$ et $\{X = x_j\}$, pour $x_i \neq x_j$, sont incompatibles)

2.3 Espérance d'une loi de probabilité

Définition Soit X une va prenant les valeur $x_1; \ldots ; x_n$ dont la loi de probabilité est représentée par le tableau suivant :

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	…	x_n
$\boldsymbol{P(X=x_i)}$	p_1	p_2	…	p_n

L'espérance mathématique de X, notée E(X), est la moyenne des x_i :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$$

Remarque Le mot « espérance » vient du jeu : Si X est le gain, E(X) est ce que le joueur peut espérer gagner sur un très grand nombre de parties. Le jeu est favorable si E(X)>0, défavorable si E(X)<0, équitable si E(X)=0. L'espérance est la moyenne de la série des x_i pondérés par les probabilités $p_i = P(X = x_i)$

En effet :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{1} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

En répétant un grand nombre de fois l'expérience, la loi des grands nombres nous permet d'affirmer que les fréquences se rapprochent des probabilités théoriques. La moyenne des résultats se rapprochent donc de l'espérance de la loi de probabilité.

Exemple Reprenons l'exemple 1).

Le tableau de la loi était le suivant :

x_i	–4	2	3
P(X = x_i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

On a donc : $E(X) = -4 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} \approx 0{,}2$

On peut espérer gagner environ 0,2 € à ce jeu.

III <u>Loi de Bernoulli</u>

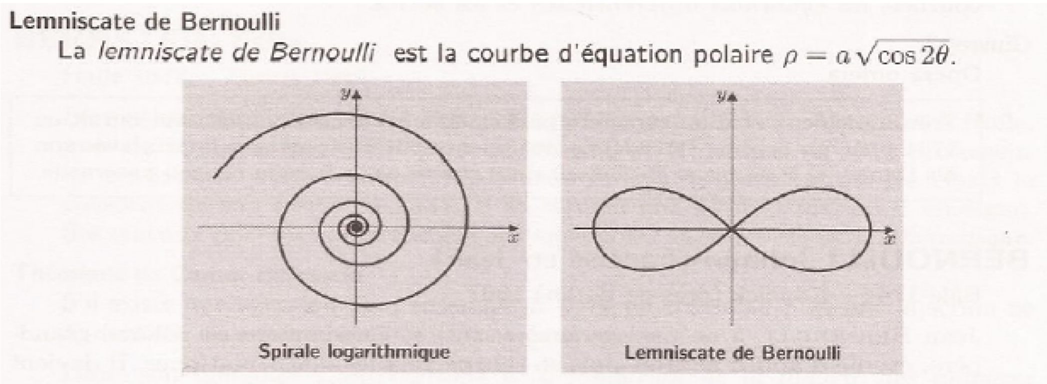
Un peu d'histoire des mathématiques

BERNOULLI Jakob (francisé en Jacques)

Bâle 1654 – Bâle 1705

Il est le premier d'une lignée de mathématiciens suisse d'origine anversoise. La famille Bernoulli s'exile alors que le général Fernando Alvarez De Toledo, plus connu sous le nom de duc D'Albe, fait régner la terreur dans les Flandres, qu'il gouverne de 1567 à 1573 au nom du roi d'Espagne Philippe II. Sur les conseils de son père, il étudie d'abord la théologie mais il se tourne rapidement vers l'astronomie, les mathématiques et la physique. Il voyage en France, en Angleterre et dans les Flandres pour rencontrer les scientifiques de renom. A son retour en Suisse en 1687, il devient professeur à l'université de Bâle, où il demeurera jusqu'à sa mort ; de cette époque datent ses principaux travaux. Le grand mérite de Jacques Bernoulli est de développer le calcul infinitésimal et de l'adapter à de nombreuses situations, en particulier à l'étude des courbes. Il étudie les courbes isochrones (courbe plane qui décrit un corps en train de tomber, la composante verticale de la vitesse étant uniforme) et le rayon de courbure. On lui doit des études sur les coniques, la spirale logarithmique, la cycloïde, la tractrice et la lemniscate. Il introduit en 1691 le terme calcul intégral (ce que vous verrez l'année prochaine) dans son sens mathématique actuel. Il est le premier à utiliser les coordonnées polaires et il sait dériver avec de telles coordonnées. On doit à Jacques Bernoulli des travaux sur les séries avec des démonstrations rigoureuses de convergence ($\sum \frac{1}{n^2}$). L'intérêt que porte Jacques Bernoulli au calcul des probabilités l'amène à s'interroger sur les notions de probabilité « géométrique » a priori donnée pour des raisons de symétrie du problème, et de probabilité a posteriori constatée par la fréquence d'apparitions. On lui doit une démonstration rigoureuse de la loi faible des grands nombres pour le jeu de pile ou face.

Œuvres : - Acta eruditorum (1690)
- Ars conjectandi (1713)



3.1 <u>Définitions et espérance</u>

Définition Une <u>épreuve de Bernoulli</u> est une expérience à deux issues que l'on peut nommer « succès » ou « échec ».

Exemple Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès « obtenir pile » et comme échec « obtenir face ». C'est bien une épreuve de Bernoulli.

Définition Soit X la va prenant la valeur 1 si le succès est réalisé avec une probabilité p et 0 sinon. X est appelée <u>variable aléatoire de Bernoulli.</u>
La loi de probabilité de X est appelée <u>loi de Bernoulli de paramètre p.</u>

Représentation de la loi de Bernoulli

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Propriété Soit X une va de Bernoulli de paramètre p.

$$E(X) = p$$

Démonstration en exercice

Exemple On lance un dé et on considère par exemple comme succès « obtenir 1 » et comme échec « ne pas obtenir un 1 ».

La loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$ associée à cette expérience est **:**

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	1/6	5/6

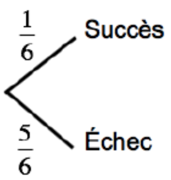
Par ailleurs, nous avons : $E(X) = p = \frac{1}{6}$.

3.2 Répétitions d'épreuves de Bernoulli

Définition Plusieurs expériences sont identiques et indépendantes si :
- elles ont les mêmes issues,
- chaque issue possède la même probabilité.

Exemple 1

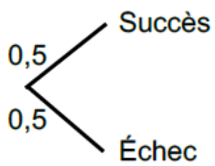
On lance 5 fois de suite un dé à six faces et on note à chaque fois le résultat.
À chaque lancer, on considère comme succès "*obtenir un six*" et comme échec "*ne pas obtenir un six*".
On répète ainsi 5 fois de suite la même expérience de Bernoulli (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre : un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer.
Pour chaque expérience, on a les probabilités suivantes :



On dit ici que $p = \frac{1}{6}$ est le paramètre de l'épreuve de Bernoulli répétée 5 fois.

Exemple 2

On lance 20 fois de suite une pièce de monnaie. On considère comme succès "*obtenir Pile*" et comme échec "*obtenir Face*".
Ces expériences de Bernoulli sont identiques et indépendantes.
Pour chaque expérience, on a les probabilités suivantes :



On dit ici que $p = 0{,}5$ est le paramètre de l'épreuve de Bernoulli répétée 20 fois.

Méthode pour calculer une probabilité associée à une épreuve de Bernoulli

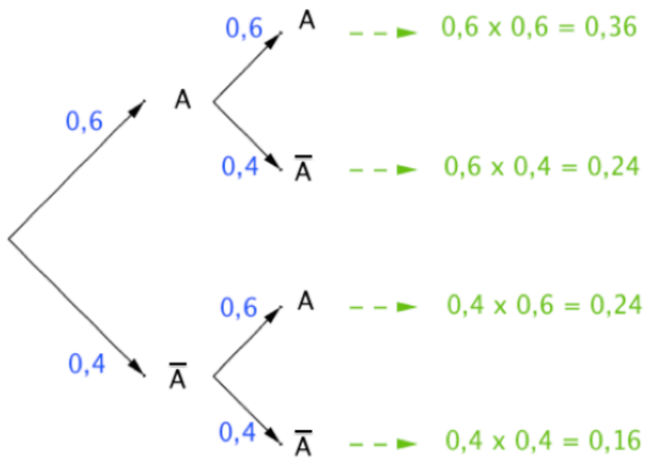
Enoncé

On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.
1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2) Déterminer les probabilités suivantes :
   a) On tire deux boules blanches.
   b) On tire une boule blanche et une boule rouge.
   c) On tire au moins une boule blanche.

Solution

1) On note A l'issue "On tire une boule blanche" et $\bar{A}$ l'issue contraire "On tire une boule rouge".
$P(A) = \frac{3}{5} = 0,6$ et $P(\bar{A}) = \frac{2}{5} = 0,4$.

On résume les issues de l'expérience dans un arbre pondéré :



2) a) Obtenir deux boules blanches correspond à l'issue $(A ; A)$:
$P_1 =$ 0,36 (d'après l'arbre).

b) Obtenir une boule blanche et une boule rouge correspond aux issues $(A ; \bar{A})$ et $(\bar{A} ; A)$:
$P_2 = 0,24 + 0,24 = 0,48$.

c) Obtenir au moins une boule blanche correspond aux issues $(A ; \bar{A})$, $(A ; A)$ et $(\bar{A} ; A)$:
$P_2 = 0,24 + 0,36 + 0,24 = 0,84$.

3.3 Echantillonnage

Définition Lorsque l'on répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire à deux issues, on obtient une série de n résultats que l'on appelle échantillon de taille n associée à une épreuve de Bernoulli.

Exemple On lance un dé 20 fois et on regarde l'apparition des nombres impairs qui est considérée comme le succès. On peut faire une simulation à l'aide d'un dé et noter l'apparition des nombres impairs ou aussi simuler à l'aide du logiciel Python en élaborant un programme utilisant l'instruction « randint(a,b) ».

Définition Si on réalise plusieurs échantillons de même taille, la fréquence du succès observée sur chaque expérience varie. Cela s'appelle la fluctuation d'échantillonnage.

Exemple On lance un dé 20 fois et on regarde le nombre de fois que l'on tombe sur Face. Il est possible que lorsque on réalise cette expérience, on puisse obtenir 9 Face sur 20 ou même 3 Face sur 20 (faites-le !) alors que la proportion théorique est de 0,5 (10 Face sur 20).

Remarque Plus la taille de l'échantillon est grande, plus le phénomène de fluctuation diminue et les fréquences se rapprochent de la proportion théorique.

Propriété Soit N échantillons de taille n et σ l'écart type de la série des fréquences obtenues et p la fréquence théorique. Alors, on a :
(i) En moyenne, environ 68 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p-\sigma\,;p+\sigma]$.
(ii) En moyenne, environ 95 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p-2\sigma\,;p+2\sigma]$.
(iii) En moyenne, environ 99 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p-3\sigma\,;p+3\sigma]$.

Propriété Soit N échantillons de taille n et σ l'écart type de la série des fréquences obtenues.
Alors, $\sigma \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exemple On lance un dé 20 fois et on regarde le nombre de fois que l'on tombe sur Face. On a, $\sigma \approx \frac{1}{2\sqrt{20}} \approx 0{,}112$