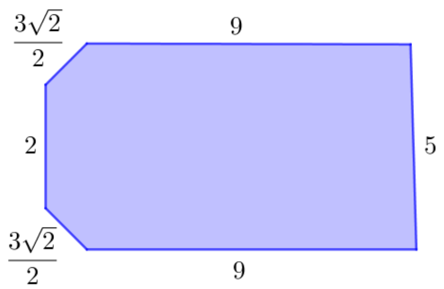
CORRIGE

<u>Exercice 1</u> *En attendant l'été…*

1. Appelons $A_T(x)$ l'aire du triangle (haché) isocèle rectangle de base et hauteur x et $A_R(x)$ l'aire du rectangle (haché) de largeur x et de longueur 5.
   On a donc : $A(x) = 12 \times 5 - 2A_T(x) - A_R(x) = 60 - 2\frac{x \times x}{2} - 5x = 60 - x^2 - 5x$
   Soit pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]0\,;2{,}5[$, $A(x) = -x^2 - 5x + 60.$
2. Partons du membre de droite :
   $-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{265}{4} = -\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + \frac{265}{4} = -x^2 - 5x - \frac{25}{4} + \frac{265}{4} = -x^2 - 5x + \frac{240}{4} = -x^2 - 5x + 60 = A(x).$
   Soit pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]0\,;2{,}5[$, $A(x) = -\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{265}{4}$.
3. a) On a $A(x) = 50{,}25 \Leftrightarrow -\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{265}{4} = 50{,}25 \Leftrightarrow -\left(x+\frac{15}{2}\right)^2 + 66{,}25 = 50{,}25 \Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - 66{,}25 + 50{,}25 = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - 16 = 0.$
   b) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}-4\right)\left(x+\frac{5}{2}+4\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{13}{2}\right) = 0.$
   Donc $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ dans $]0\,;2{,}5[$.
4. Tout d'abord, le problème revient à résoudre l'équation $A(x) = 50{,}25$ et d'après la question 3., on en déduit que $x = \frac{3}{2}$.
   Calculons, l'hypoténuse h d'un des triangles isocèles rectangles hachurés :
   Par le théorème de Pythagore, on a : $h = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
   Soit la figure suivante représentant la piscine :



<u>Exercice 2</u>

Supposons que $x \geq 0$.
Appelons A_R l'aire du rectangle et A_T l'aire du triangle.

On a : $A_T = \frac{BC \times AO}{2}$ et $A_R = HE \times EF.$

Avec :

- $BC = 8$

- $AO = 4$

- $HE = 2OE = 2x$.

- Pour calculer, utilisons le théorème de Thalès dans le triangle AOC (F et E sont deux points de [OC] et [AC] respectivement avec (EF) parallèle à (AO)) :

Soit : $\frac{CE}{CO} = \frac{EF}{OA} \Leftrightarrow \frac{4-x}{4} = \frac{EF}{4} \Leftrightarrow EF = 4 - x$.

Il s'agit maintenant de résoudre l'équation suivante :

$$A_R = \frac{3}{8}A_T \Leftrightarrow 2x(4-x) = \frac{3}{8}.\frac{8\times 4}{2} \Leftrightarrow 8x - 2x^2 = 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{(x-2)^2 = x^2-4x+4} (x-2)^2 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2-1)(x-2+1) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 0$.

$S = \{1\,;3\}$.

Et si $x \leq 0$, on a par symétrie $S = \{-1; -3\}$.

Bilan

Les positions possibles du point E pour que l'aire du rectangle est égale à 3/8e de l'aire du triangle sont telles que x soit égale à $1, 3, -1\ et\ -3$.

<u>Exercice 3</u> *L'appel aux couleurs…*

Soit A_C l'aire de la croix et A_D l'aire restante du drapeau.

On a :

- $A_C = 8x + 6x \underbrace{-x^2}_{(*)} = 14x - x^2$.

(*) : car on sinon on compterait l'aire d'un carré en trop.

- $A_D = 8 \times 6 - A_C = 48 - A_C$.

Le problème revient à résoudre l'inéquation suivante :

$$A_C \leq A_D \Leftrightarrow A_C \leq 48 - A_C \Leftrightarrow 2A_C \leq 48 \Leftrightarrow 2(14x - x^2) - 48 \leq 0 \Leftrightarrow 28x - 2x^2 - 48 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$2x^2 - 28x + 48 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 24 \geq 0$.

Or, $(x-2)(x-12) = x^2 - 14x + 24$.

Soit l'inéquation suivante à résoudre :

$$(x-2)(x-12) \geq 0$$

Etablissons un tableau de signes du produit $(x-2)(x-12)$ sur l'intervalle $[0,5 ; 6]$.

x	$0,5$		2		6
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x-12$		$-$		$-$	
$(x-2)(x-12)$		$+$	0	$-$	

D'où $S=[0,5 ; 2]$.

Bilan

Pour que l'aire de la croix soit inférieure ou égale à l'aire restante du drapeau, il faut que la largeur x de la croix appartienne l'intervalle $[0,5 ; 2]$.

Exercice 4

Soit la fonction f suivante où $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1. - $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0,58.$
   - $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}}=-\frac{1}{3\sqrt{\frac{8}{9}}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\approx -0,35.$
   - Le calcul de cette image n'est pas possible car $1-2^2=-3<0$.
2. Les images $f(x)$ existent si et seulement $1-x^2\geq 0$ *et* $\sqrt{1-x^2}\neq 0$ soit $1-x^2>0$.
   Et $1-x^2>0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)>0$.

   Etablissons un tableau de signes du produit $(1-x)(1+x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-x)(1+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   D'où $D_f=]-1;1[$

3. - $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0 \Leftrightarrow x=0$. L'antécédent de 0 par f est 0.
   - $f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=1 \Leftrightarrow x=\sqrt{1-x^2}\geq 0 \Leftrightarrow x^2=1-x^2 \Leftrightarrow 2x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
   $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ car $x\geq 0$. L'antécédent de 1 par f sont $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. $f(x)=x \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=x \Leftrightarrow x=x\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ *ou* $\sqrt{1-x^2}=1 \Leftrightarrow x=0$ *ou* $1-x^2=1 \Leftrightarrow x=0$ *ou* $x^2=0$. Soit : $S=\{0\}$.

Exercice 5

1. On constate que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.
2. On a :

➢ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$
$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont bien colinéaires, ce qui veut donc dire que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

Exercice 6

Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points suivants $M(-2\,;\,-2), N(3\,;1), P(0\,;6)$ et $Q(-5\,;3)$.

1. On a :
   - ➢ $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$,
   - ➢ $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

   On a donc que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. C'est-à-dire que MNPQ est un parallélogramme.

2. On a :
   - ➢ $\|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} = MN,$
   - ➢ $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ soit $\|\overrightarrow{NP}\| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34} = NP,$
   - ➢ $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ soit $\|\overrightarrow{MP}\| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = MP.$

   D'après la réciproque du théorème de Pythagore dans MNP, on a $MP^2 = MN^2 + NP^2$. Le triangle MNP est donc rectangle en N. On en déduit d'après 1., que tout d'abord le quadrilatère MNPQ est un rectangle. Puis, comme NP=MN on en déduit que MNPQ est un carré.

3. a) Le repère $(M\,;\,\overrightarrow{MN}\,,\overrightarrow{MP})$ n'est pas orthonormé mais quelconque puisque (MN) n'est pas perpendiculaire à (MP) et $MN \neq MP$.
   b) Le repère $(M\,;\,\overrightarrow{MN}\,,\overrightarrow{MQ})$ orthonormé car MN=MQ et (MQ) perpendiculaire à (MN).

BONUS

1) Deux cas se présentent à nous :

➢ $x \geq 0$: comme pour tout $x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{1+x^2} \geq 0$, on en déduit que $x + \sqrt{1+x^2} \geq 0,$

➢ $x < 0$: pour tout $x \in \mathbb{R}^{-*}$: $1 + x^2 \geq x^2$ soit $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{x^2}$ soit $\sqrt{1+x^2} \geq -x$ car $\sqrt{x^2} = |x|$ et $x < 0$. D'où $x + \sqrt{1+x^2} \geq 0$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{1+x^2} \geq 0.$

2) Plaçons-nous dans le repère quelconque $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

On a $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{BC}$ soit $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{x+1}\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire :

$\overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{x+1}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{x+1}\overrightarrow{AC} = \frac{x}{x+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{x+1}\overrightarrow{AC}.$

On en déduit que dans le repère cité précédemment on a :

A(0 ; 0), $S\left(\frac{x}{x+1}\,;\frac{1}{x+1}\right)$,$R(x\,;1)$ et on a : $\det\left(\overrightarrow{AS}\,;\,\overrightarrow{AR}\right)=\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x+1}=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont colinéaires. Les points A, R et S sont donc alignés.