CORRIGE

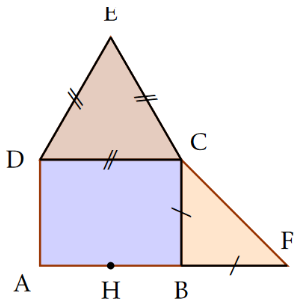
Exercice 1

1. On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{ABC}) = 2 \times 3 \times \underbrace{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)}_{=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 6 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}$.
2. On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AK \times AC = -3 \times 2 = -6$.
3. On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -3 + 4 = 1$.

Exercice 2

1. On a $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = AD^2 = 6^2 = \boxed{36}$.
2. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}.(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - DC \times AB = 36 - 3 \times 8 = \boxed{12}$.
3. On a $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = CA \times DB \times \cos(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{DB}) = CA \times DB \times \cos(\widehat{AOB})$ d'où $\cos(\widehat{AOB}) = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}}{CA \times DB}$.
   On calcule CA et respectivement DB par l'intermédiaire du théorème de Pythagore dans le triangle ADC rectangle en D respectivement dans le triangle ADB rectangle en A :
   $DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ et $CA = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.
   D'où : $\cos(\widehat{AOB}) = \frac{12}{3\sqrt{5} \times 10} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$ donc $\boxed{\widehat{AOB} \approx 80^\circ}$.

Exercice 3



a. C se projette orthogonalement en B sur (AB) :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AB = 16$.

b. E se projette orthogonalement en K milieu de [CD] sur (CD) :
$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} = CD \times CK = 8$.

c. C se projette orthogonalement en B sur (FA) :
$\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{FA} = FA \times FB = 21$.

d. D se projette orthogonalement en A sur (BF) :
$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF} = -BA \times BF = -12$.

e. C se projette orthogonalement en A sur (AD) et
F se projette orthogonalement en A sur (AD) :
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CF} = -AD \times DA = -9$.

f. D se projette orthogonalement en A sur (FA) et
C se projette orthogonalement en H sur (FA) :
$\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{DE} = -FA \times AH = -14$.

Exercice 4

1. Considérons l'événement A : « Avoir un double six ». On en déduit que $\bar{A}$: « Ne pas avoir un double six ».
   Or $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.
2. Comme p_n est la probabilité d'avoir au moins une fois un double six n fois, $1 - p_n$ est la probabilité de l'événement contraire précédent soit ne pas avoir un double six n fois. Donc d'après la question 1., on a :
   $1 - p_n = \left(\frac{35}{36}\right)^n$.
3. Tout d'abord, $1 - p_n = \left(\frac{35}{36}\right)^n \Leftrightarrow p_n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$.
   Puis, on a $\frac{35}{36} < 1$ donc pour tout $n \geq 1, \frac{35}{36} \times \left(\frac{35}{36}\right)^n < 1 \times \left(\frac{35}{36}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^{n+1} < \left(\frac{35}{36}\right)^n \Leftrightarrow -\left(\frac{35}{36}\right)^n < -\left(\frac{35}{36}\right)^{n+1}$

$\Leftrightarrow 1-\left(\frac{35}{36}\right)^n < 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{n+1} \Leftrightarrow p_n < p_{n+1}$. La suite (p_n) est donc croissante.

C'était prévisible car plus on joue et plus on a de chances d'avoir un double six.

4. On a $p_n > 0{,}99 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{35}{36}\right)^n > 0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^n < 0{,}01 \Leftrightarrow u_n < 0{,}01$ en posant $u_n = \left(\frac{35}{36}\right)^n$.

A l'aide de la calculatrice, rentrons l'expression et étudions son tableau de valeurs.

Le plus entier naturel satisfaisant cette condition est 164.

Exercice 5

On pioche au hasard un jeton du sac.

1. Un jeu est organisé ainsi : pour une mise de trois euros, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton. On définit la variable aléatoire X qui associe le bénéfice d'un joueur.

a) Les différents gains possibles à ce jeu sont $-3+1=-2$, $-3+2=-1$, $-3+3=0$, $-3+4=1$, 2, 3. D'où l'ensemble des valeurs que X peut prendre est $\{-2,-1,0,1,2,3\}$.

b) On note qu'il y a $\frac{6\times 7}{2}=21$ jetons dans le sac. L'événement "X=-2" correspond à l'événement tirer une boule avec le numéro 1. Comme, il y a 6 jetons avec le numéro un et que l'expérience est équiprobable, on a $\mathbb{P}(X=-2)=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$. De même, on compléte le tableau de probabilités suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

c) L'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X est

$$\mathbb{E}(X)=\frac{2}{7}\times(-2)+\frac{5}{21}\times(-1)+\frac{4}{21}\times 0+\frac{1}{7}\times 1+\frac{2}{21}\times 2+\frac{1}{21}\times 3=\frac{-7}{21}=\frac{-1}{3}$$

En moyenne, le joueur perd environ 33 cents.

2. Pour rendre ce jeu équitable (c'est-à-dire tel que $\mathbb{E}(X)=0$), on décide de modifier le gain correspondant au jeton numéroté 6.
Notons a le gain du joueur lorsqu'il tire le jeton numéro 6, alors la loi de X est :

x_i	-2	-1	0	1	2	a
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0\\ \frac{2}{7}\times(-2)+\frac{5}{21}\times(-1)+\frac{4}{21}\times 0+\frac{1}{7}\times 1+\frac{2}{21}\times 2+\frac{1}{21}\times a &= 0\\ \frac{-10+a}{21} &= 0\\ a &= 10\end{aligned}$$

Ainsi, pour que le jeu soit équitable, il faut que le gain associé au jeton numéro 6 soit de $a+3=13$€.