LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Annexe

Programme d'enseignement optionnel de mathématiques expertes de terminale générale

Sommaire

Préambule

Intentions majeures

L'enseignement optionnel de mathématiques expertes est destiné aux élèves qui ont un goût affirmé pour les mathématiques et qui visent des formations où les mathématiques occupent une place prépondérante. Il permet d'aborder de façon approfondie d'autres champs d'étude que ceux proposés par l'enseignement de spécialité.

Il est conçu à partir des intentions suivantes :

- permettre à chaque élève de consolider les acquis de l'enseignement de spécialité de première, de développer son goût des mathématiques, d'en apprécier les démarches et les objets afin qu'il puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification et la généralisation que permet la maîtrise de l'abstraction ;
- développer des interactions avec d'autres enseignements de spécialité ;
- préparer aux études supérieures.

Le programme de mathématiques expertes définit un ensemble de connaissances et de compétences, réaliste et ambitieux, qui s'appuie sur le programme de la spécialité de classe de première dans un souci de cohérence, en réactivant les notions déjà étudiées et en y ajoutant un nombre raisonnable de nouvelles notions, à étudier de manière suffisamment approfondie.

• Compétences mathématiques

Dans le prolongement des cycles précédents, on travaille les six grandes compétences :

- **chercher**, expérimenter, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- **modéliser**, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- **représenter**, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique …), changer de registre ;
- **raisonner**, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- **calculer**, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- **communiquer** un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. Ceux-ci facilitent en effet le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. L'installation de ces réflexes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser connaissances, méthodes et stratégies.

• Diversité de l'activité de l'élève

La diversité des activités mathématiques proposées doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique, et de la situer au sein de l'activité scientifique. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.

Il importe donc que cette diversité se retrouve dans les travaux proposés à la classe. Parmi ceux-ci, les travaux écrits faits hors du temps scolaire (exercices réguliers d'entraînement ou devoirs à la maison) permettent, à travers l'autonomie laissée à chacun, le développement des qualités d'initiative, tout en assurant la stabilisation des connaissances et des compétences. Ils doivent être conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité des élèves.

Le calcul est un outil essentiel pour la résolution de problèmes. Il importe de poursuivre l'entraînement des élèves dans ce domaine par la pratique régulière du calcul numérique et du calcul littéral, sous ses diverses formes : mentale, écrite, instrumentée.

- **Utilisation de logiciels**

L'utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, favorise l'interaction entre l'observation et la démonstration, et change profondément la nature de l'enseignement.

L'utilisation régulière de ces outils peut intervenir selon trois modalités :

- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective adapté ;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques en classe, à l'occasion de la résolution d'exercices ou de problèmes ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors du temps de classe (par exemple au CDI ou à un autre point d'accès au réseau local).

- **Évaluation des élèves**

Les élèves sont évalués en fonction des capacités attendues et selon des modes variés : devoirs surveillés avec ou sans calculatrice, devoirs en temps libre, rédaction de travaux de recherche individuels ou collectifs, travaux pratiques pouvant s'appuyer sur des logiciels, exposé oral d'une solution.

- **Place de l'oral**

Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l'appropriation des notions mathématiques et la résolution des problèmes. Comme toutes les disciplines, les mathématiques contribuent au développement des compétences orales, notamment à travers la pratique de l'argumentation. Celle-ci conduit à préciser sa pensée et à expliciter son raisonnement de manière à convaincre. Elle permet à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu'à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve. Des situations variées se prêtent à la pratique de l'oral en mathématiques : la reformulation par l'élève d'un énoncé ou d'une démarche, les échanges interactifs lors de la construction du cours, les mises en commun après un temps de recherche, les corrections d'exercices, les travaux de groupe, les exposés individuels ou à plusieurs … L'oral mathématique mobilise à la fois le langage naturel et le langage symbolique dans ses différents registres (graphiques, formules, calcul).

- **Trace écrite**

Disposer d'une trace de cours claire, explicite et structurée est une aide essentielle à l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux étapes importantes de recherche, d'appropriation individuelle ou collective, de présentation commentée, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les méthodes et les stratégies étudiées en classe. Explicitant les liens entre les différentes notions ainsi que leurs objectifs, éventuellement enrichie par des exemples ou des schémas, elle constitue pour l'élève une véritable référence vers laquelle il peut se tourner autant que de besoin, tout au long du cycle terminal. Sa consultation régulière (notamment au moment de la recherche d'exercices et de problèmes, sous la conduite du professeur ou en autonomie) favorise à la fois la mémorisation et le développement de compétences. Le professeur doit avoir le souci de la bonne qualité (mathématique et rédactionnelle) des traces écrites figurant au tableau et dans les cahiers d'élèves. En particulier, il est essentiel de bien distinguer le statut des énoncés : conjecture, définition, propriété (admise ou démontrée) démonstration, théorème.

- **Travail personnel des élèves**

Si la classe est le lieu privilégié pour la mise en activité mathématique des élèves, les travaux hors du temps scolaire sont indispensables pour consolider les apprentissages. Fréquents, de longueur raisonnable et de natures variées, ces travaux sont essentiels à la formation des élèves. Individuels ou en groupe, évalués à l'écrit ou à l'oral, ces travaux sont conçus de façon à prendre en compte la diversité des élèves et permettent le développement des qualités d'initiative tout en assurant la stabilisation des connaissances et des compétences.

Quelques lignes directrices pour l'enseignement

Le professeur veille à créer dans la classe de mathématiques une atmosphère de travail favorable aux apprentissages, combinant bienveillance et exigence. Il faut développer chez chaque élève des attitudes positives à l'égard des mathématiques et sa capacité à résoudre des problèmes stimulants.

L'élève doit être incité à s'engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe, et à développer sa confiance en lui. Il cherche, essaie des pistes, prend le risque de se tromper. Il ne doit pas craindre l'erreur, car il sait qu'il peut en tirer profit grâce au professeur, qui l'aide à l'identifier, à l'analyser et la comprendre. Ce travail sur l'erreur participe à la construction de ses apprentissages.

Les problèmes proposés aux élèves peuvent être internes aux mathématiques, provenir de l'histoire des mathématiques, être issus des autres disciplines ou du monde réel ; on prend cependant garde que la simple inclusion de références au monde réel ne suffit pas toujours à transformer un exercice de routine en un bon problème. Dans tous les cas, ces problèmes doivent être bien conçus et motivants, afin de développer les connaissances et compétences mathématiques du programme.

Le professeur doit veiller à établir un équilibre entre divers temps d'apprentissage :

- les temps de recherche, d'activité, de manipulation ;
- les temps de dialogue et d'échange, de verbalisation ;
- les temps de cours, où le professeur expose avec précision, présente certaines démonstrations et permet aux élèves d'accéder à l'abstraction ;
- les temps où sont présentés et discutés des exemples, pour vérifier la bonne compréhension de tous les élèves ;
- les exercices et problèmes, allant progressivement de l'application la plus directe au thème d'étude ;
- les rituels, afin de consolider les connaissances et les méthodes.

Organisation du programme

L'enseignement de mathématiques expertes de la classe terminale s'organise autour des thèmes suivants :

- les nombres complexes, vus comme objets algébriques et géométriques ;
- l'arithmétique ;
- les matrices et les graphes.

Sans introduire explicitement les structures algébriques, cet enseignement introduit et étudie certains exemples fondamentaux : corps des nombres complexes, groupes des nombres complexes de module 1 et des racines n-ièmes de l'unité, anneau des entiers relatifs, d'une manière suffisamment approfondie pour préparer à des généralisations. De même, on aborde la notion générale d'équation algébrique, mais pas celle de polynôme formel. Le professeur peut mettre en évidence l'apparition dans divers contextes de notions communes : élément neutre, opposé ou inverse.

Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme propose quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoir à la maison …

Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items « Histoire des mathématiques » identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur pourra, s'il le désire, s'appuyer sur l'étude de textes historiques.

Le programme propose des problèmes possibles, mais en aucun cas obligatoires. Leur nature est très diverse : certains d'entre eux sont un petit prolongement des notions du programme ; d'autres ouvrent des perspectives plus larges. Ils permettent une différenciation pédagogique et offrent des pistes pour l'épreuve orale terminale.

Programme

Nombres complexes

L'étude des nombres complexes est menée selon les lignes directrices suivantes.

D'un point de vue algébrique, les nombres complexes permettent de résoudre les équations de degré 2 à coefficients réels lorsque le discriminant est négatif. Plus généralement, les nombres complexes offrent un cadre privilégié pour l'étude des équations algébriques.

On met en évidence, dans un cadre général, la factorisation associée à une racine en établissant que le nombre de solutions d'une équation est majoré par son degré et en montrant que somme et produit des racines d'un polynôme se lisent sur le polynôme. Ces faits simples ouvrent la porte à de nombreuses et intéressantes activités. On peut par ailleurs revenir sur le cas des polynômes réels, en utilisant des techniques d'analyse.

Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ peut être vu comme l'ensemble des nombres complexes. Cette observation prend tout son sens lorsqu'on réalise que de nombreuses notions de géométrie plane s'interprètent en termes de nombres complexes. On peut ainsi utiliser le calcul dans $\mathbb{C}$ pour résoudre de nombreuses questions de géométrie et de trigonométrie ; une bonne maîtrise des raisonnements et techniques fondés sur ce principe est un des objectifs principaux de cette partie.

Les racines *n*-ièmes de l'unité fournissent par ailleurs un pont intéressant entre équations polynomiales et géométrie.

- **Histoire des mathématiques**

L'algèbre s'est longtemps identifiée à l'étude des équations polynomiales. La recherche de formules pour les racines analogues à celles du second degré a constitué un problème central chez les mathématiciens italiens de la Renaissance, notamment Tartaglia, Cardan, Bombelli, ou encore chez Descartes ou Girard, chez qui on voit apparaître des quantités complexes sous forme symboliques. Ces textes révèlent l'importance des notations en mathématiques ; ils soulignent la différence entre formules de résolution symbolique et méthodes d'approximation. Ils montrent aussi que la découverte de nouveaux objets mathématiques ne passe pas par les chemins qui semblent rétrospectivement les plus directs.

La réalisation géométrique des nombres complexes apparaît plus tard chez Gauss, Argand ou Mourey, où l'on trouve un lien entre les nombres complexes et la tentative de formaliser ce qui deviendra les vecteurs. Une illustration de l'efficacité de ce lien entre calcul et géométrie est le calcul de cos(π/5), qu'on peut mettre en perspective avec la construction du pentagone régulier dans les *Éléments* d'Euclide. Klein introduit, dans son programme d'Erlangen, un point de vue sur la géométrie qui transparaît dans l'étude des similitudes directes du plan complexe.

Les nombres complexes, introduits pour des raisons internes aux mathématiques, sont désormais des outils importants en physique (électricité notamment) et économie (cycle de croissance, de prix).

- **Nombres complexes : point de vue algébrique**

Contenus

- Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Partie réelle et partie imaginaire. Opérations.
- Conjugaison. Propriétés algébriques.
- Inverse d'un nombre complexe non nul.
- Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.

Capacités attendues

- Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.
- Résoudre une équation linéaire $az = b$.
- Résoudre une équation simple faisant intervenir z et $\bar{z}$.

Démonstrations

- Conjugué d'un produit, d'un inverse, d'une puissance entière.
- Formule du binôme.

- **Nombres complexes : point de vue géométrique**

Contenus

- Image d'un nombre complexe. Image du conjugué. Affixe d'un point, d'un vecteur.
- Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique.
- Relation $|z|^2 = z\bar{z}$. Module d'un produit, d'un inverse.
- Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module *1*. Stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse.
- Arguments d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique.
- Forme trigonométrique.

Capacités attendues

- Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe.
- Représenter un nombre complexe par un point. Déterminer l'affixe d'un point.

Démonstrations

- Formule $|z|^2 = z\bar{z}$. Module d'un produit. Module d'une puissance.

Problèmes possibles

- Suite de nombres complexes définie par $z_{n+1} = az_n + b$.
- Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes ; cas d'égalité.
- Étude expérimentale de l'ensemble de Mandelbrot, d'ensembles de Julia.

- **Nombres complexes et trigonométrie**

Contenus

- Formules d'addition et de duplication à partir du produit scalaire.
- Exponentielle imaginaire, notation $e^{i\theta}$. Relation fonctionnelle. Forme exponentielle d'un nombre complexe.
- Formules d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.
- Formule de Moivre : $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.

Capacités attendues

- Passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme trigonométrique ou exponentielle et inversement.
- Effectuer des calculs sur des nombres complexes en choisissant une forme adaptée, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes.
- Utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour transformer des expressions trigonométriques, dans des contextes divers (intégration, suites, etc.), calculer des puissances de nombres complexes.

Démonstration

- Démonstration d'une des formules d'addition.

- **Équations polynomiales**

On utilise librement la notion de fonction polynôme à coefficients réels, plus simplement appelée polynôme. On admet que si une fonction polynôme est nulle, tous ses coefficients sont nuls.

Contenus

- Solutions complexes d'une équation du second degré à coefficients réels.
- Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$.
- Si P est un polynôme et $P(a) = 0$, factorisation de P par $z - a$.
- Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Capacités attendues

- Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels.
- Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.
- Factoriser un polynôme dont une racine est connue.

Démonstrations

- Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$. Factorisation de $P(z)$ par $z - a$ si $P(a) = 0$.
- Le nombre de solutions d'une équation polynomiale est inférieur ou égal à son degré.

Problèmes possibles

- Racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes.
- Formules de Viète.
- Résolution par radicaux de l'équation de degré 3.

- **Utilisation des nombres complexes en géométrie**

Contenus

- Interprétation géométrique du module et d'un argument de $\frac{c-a}{b-a}$.
- Racines n-ièmes de l'unité. Description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité. Représentation géométrique. Cas particuliers : $n = 2, 3, 4$.

Capacités attendues

- Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser les nombres complexes pour étudier des configurations du plan : démontrer un alignement, une orthogonalité, calculer des longueurs, des angles, déterminer des ensembles de points.
- Utiliser les racines de l'unité dans l'étude de configurations liées aux polygones réguliers.

Démonstration

- Détermination de l'ensemble $\mathbb{U}_n$.

Problèmes possibles

- Lignes trigonométriques de $\frac{2\pi}{5}$, construction du pentagone régulier à la règle et au compas.
- Somme des racines n-ièmes de l'unité.
- Racines n-ièmes d'un nombre complexe.
- Transformation de Fourier discrète.

Arithmétique

Depuis la classe de seconde, l'élève connaît les ensembles de nombres usuels. L'enseignement de mathématiques expertes permet de revenir sur les plus familiers des nombres : les entiers.

Les résultats fondamentaux de l'arithmétique des entiers y sont présentés. Une place importante est faite à l'étude des congruences (arithmétique modulaire). Le cours est illustré par des applications variées (tests de divisibilité, exemples simples d'équations diophantiennes, problèmes de chiffrement).

- **Histoire des mathématiques**

L'arithmétique des entiers est présente chez les mathématiciens grecs, par exemple dans les *Éléments* d'Euclide, chez Nicomaque de Gérase, Théon de Smyrne ou encore Diophante, dont certains développements touchent à la combinatoire. Les aspects algorithmiques sont présents depuis l'origine : méthodes de fausse position, algorithme d'Euclide, algorithme d'Euclide étendu de Bachet (1612) puis Bézout (1766), applications aux fractions continues chez Euler (1737), nombre de racines d'une équation chez Sturm (1835).

L'histoire de la théorie des nombres, qui permet d'évoquer les travaux de Fermat, Lagrange, Gauss, Dirichlet et de bien d'autres, fourmille de théorèmes d'énoncés simples aux preuves difficiles, ainsi que de conjectures de formulation élémentaire mais non résolues.

Des questions issues de l'arithmétique, apparemment gratuites, ont donné lieu à des applications spectaculaires en cryptographie ou codage. On peut noter enfin l'intérêt historique de l'étude de nombres particuliers par exemple ceux de Fermat, Mersenne, Carmichael ou Sophie Germain.

Contenus

- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.
- Division euclidienne d'un élément de $\mathbb{Z}$ par un élément de $\mathbb{N}^*$.
- Congruences dans $\mathbb{Z}$. Compatibilité des congruences avec les opérations.
- PGCD de deux entiers. Algorithme d'Euclide.
- Couples d'entiers premiers entre eux.
- Théorème de Bézout.
- Théorème de Gauss.
- Nombres premiers. Leur ensemble est infini.
- Existence et unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.
- Petit théorème de Fermat.

Capacités attendues

- Déterminer les diviseurs d'un entier, le PGCD de deux entiers.
- Résoudre une congruence $ax \equiv b$ [n]. Déterminer un inverse de a modulo n lorsque a et n sont premiers entre eux.
- Établir et utiliser des tests de divisibilité, étudier la primalité de certains nombres, étudier des problèmes de chiffrement.
- Résoudre des équations diophantiennes simples.

Démonstrations

- Écriture du PGCD de a et b sous la forme $ax + by$, $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.
- Théorème de Gauss.
- L'ensemble des nombres premiers est infini.

Exemples d'algorithmes

- Algorithme d'Euclide de calcul du PGCD de deux nombres et calcul d'un couple de Bézout.
- Crible d'Ératosthène.
- Décomposition en facteurs premiers.

Problèmes possibles

- Détermination des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.
- Lemme chinois et applications à des situations concrètes.
- Démonstrations du petit théorème de Fermat.
- Problèmes de codage (codes barres, code ISBN, clé du Rib, code Insee).
- Étude de tests de primalité : notion de témoin, nombres de Carmichaël.
- Problèmes de chiffrement (affine, Vigenère, Hill, RSA).
- Recherche de nombres premiers particuliers (Mersenne, Fermat).
- Exemples simples de codes correcteurs.
- Étude du système cryptographique RSA.
- Détermination des triplets pythagoriciens.
- Étude des sommes de deux carrés par les entiers de Gauss.
- Étude de l'équation de Pell-Fermat.

Graphes et matrices

Prenant appui sur la résolution de problème et la modélisation, cette partie a pour objectif d'introduire les notions de graphes et de matrices en soulignant l'intérêt de les appliquer à d'autres disciplines, notamment les sciences économiques et sociales, les sciences de la vie et de la Terre, la physique-chimie, l'informatique etc.

Les matrices sont étudiées sous divers points de vue : modélisation de problèmes issus des autres disciplines, systèmes linéaires, transformations géométriques. Il s'agit de mettre en valeur l'efficacité du calcul matriciel pour représenter et résoudre des problèmes.

La notion de graphe est fondamentale pour les mathématiques discrètes et a des applications dans de nombreux domaines. Le programme la fait interagir avec les matrices. Une illustration exemplaire dans le domaine des probabilités, les chaînes de Markov, fait l'objet d'un développement spécifique.

- **Histoire des mathématiques**

L'histoire de cette partie combine trois thèmes très contemporains : les graphes, outils fondamentaux des mathématiques discrètes, les matrices et les chaînes de Markov. Les liens mis en évidence soulignent l'unité et l'efficacité des mathématiques.

L'histoire des graphes remonte au moins à Euler, par exemple à travers le problème des ponts de Königsberg. Des applications plus récentes en intelligence artificielle, concernant notamment les réseaux, soulignent la pertinence et l'actualité de la modélisation à l'aide de graphes et matrices.

La considération de tableaux de nombres en liaison avec les systèmes linéaires est très ancienne, mais l'introduction par Cayley des matrices comme objets de calcul représentant des transformations linéaires date du milieu du XIXe siècle, et leur importance ne sera clairement reconnue qu'au XXe siècle.

L'étude des chaînes de Markov, qui remonte au début du XXe siècle, donne une belle utilisation du formalisme matriciel.

Contenus

- Graphe, sommets, arêtes. Exemple du graphe complet.
- Sommets adjacents, degré, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe connexe.
- Notion de matrice (tableau de nombres réels). Matrice carrée, matrice colonne, matrice ligne. Opérations. Inverse, puissances d'une matrice carrée.
- Exemples de représentations matricielles : matrice d'adjacence d'un graphe ; transformations géométriques du plan ; systèmes linéaires ; suites récurrentes.
- Exemples de calcul de puissances de matrices carrées d'ordre 2 ou 3.
- Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$.
- Graphe orienté pondéré associé à une chaîne de Markov à deux ou trois états.
- Chaîne de Markov à deux ou trois états. Distribution initiale, représentée par une matrice ligne π_0. Matrice de transition, graphe pondéré associé.
- Pour une chaîne de Markov à deux ou trois états de matrice P, interprétation du coefficient (i,j) de P^n. Distribution après n transitions, représentée comme la matrice ligne $\pi_0 P^n$.
- Distributions invariantes d'une chaîne de Markov à deux ou trois états.

Capacités attendues

- Modéliser une situation par un graphe.
- Modéliser une situation par une matrice.
- Associer un graphe orienté pondéré à une chaîne de Markov à deux ou trois états.
- Calculer l'inverse, les puissances d'une matrice carrée.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, utiliser le calcul matriciel, notamment l'inverse et les puissances d'une matrice carrée, pour résoudre un système linéaire, étudier une suite récurrente linéaire, calculer le nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets d'un graphe, étudier une chaîne de Markov à deux ou trois états (calculer des probabilités, déterminer une probabilité invariante).

Démonstrations

- Expression du nombre de chemins de longueur *n* reliant deux sommets d'un graphe à l'aide de la puissance *n*-ième de la matrice d'adjacence.
- Pour une chaîne de Markov, expression de la probabilité de passer de l'état *i* à l'état *j* en *n* transitions, de la matrice ligne représentant la distribution après *n* transitions.

Problèmes possibles

- Étude de graphes eulériens.
- Interpolation polynomiale.
- Marche aléatoire sur un graphe. Étude asymptotique.
- Modèle de diffusion d'Ehrenfest.
- Modèle « proie-prédateur » discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes.
- Algorithme PageRank.