Chapitre 11 PRODUIT SCALAIRE 1reS

Un peu d'histoire des maths

La notion de produit scalaire est apparu pour les besoins de la physique. En effet, le travail d'une force est directement relié au produit scalaire, et il est au cœur de nombreux domaines de l'activité humaine : l'énergie, les déplacements terrestres, l'aéronautique, la navigation maritime, ect. Le concept, relativement récent, a été introduit au milieu du XIXème siècle par le mathématicien Hermann Grassmann (1809 – 1877). Il fut baptisé produit scalaire par William Hamilton (1805 – 1865). Le mot « scalaire » provient du latin «scala » qui signifie échelle.

I Définition

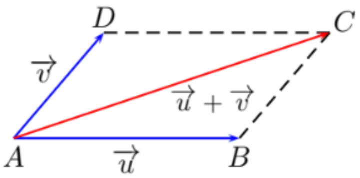
1.1 1ère expression du produit scalaire

Définition Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ (se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »), défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right).$$

Remarque Par convention, $\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ (appelé carré scalaire du vecteur $\vec{u}$). On a $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ (c'est donc la longueur du vecteur $\vec{u}$ au carré).

Exemple Soit ABCD un parallélogramme. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \vec{u}.\vec{v} = \cdots = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2)$$

Propriété Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
(i) *Symétrie* $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
(ii) Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

1.2 Produit scalaire et orthogonalité

Définition Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Propriété Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0.$

Démonstration

II Propriétés du produit scalaire

2.1 Expression analytique du produit scalaire

Propriété On se place dans un repère orthonormé.
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration admise

Exemple Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -9 \end{pmatrix}$

2.2 Produit scalaire et opérations

Propriété Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. Soit λ un réel.

$(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda \times (\vec{u}.\vec{v})$
$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda \times (\vec{u}.\vec{v})$
$(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

Démonstration en exercice

Propriété *Les identités remarquables*
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

a) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2u.v + v^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
b) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2u.v + v^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
c) $(\vec{u} + v).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}^2 - \|\vec{v}\|^2$

Démonstration en exercice

Propriété Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et colinéaires.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens, $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraire, $\vec{u}.\vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.

Démonstration en exercice

Exemple Soit ABCD un carré de centre O.

III D'autres expressions du produit scalaire

3.1 Avec le projeté orthogonal

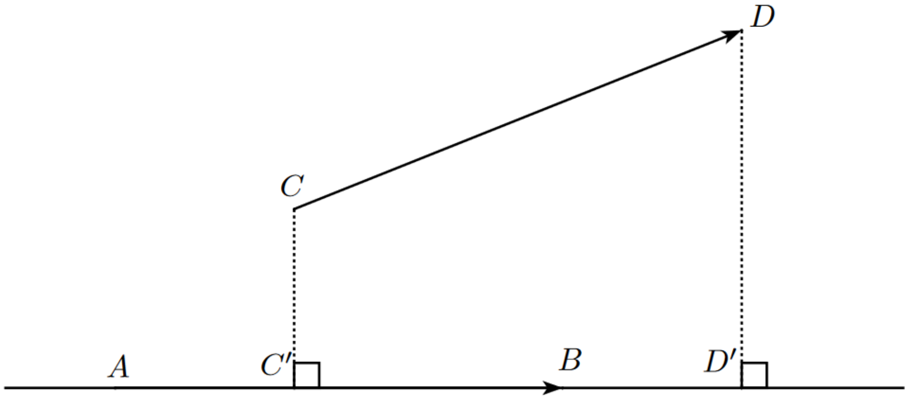
Définition Soit (d) une droite et M un point du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) est le point d'intersection H de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par M.

Figure

La propriété suivante permet de ramener le calcul du produit scalaire de deux vecteurs au calcul du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires, calcul en général plus aisé.

Propriété Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls.
Les points C' et D' sont les projetés orthogonaux respectivement de C et de D sur la droite (AB).
Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

Figure



Démonstration

Par abus de langage, on dit que $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$ sur $\overrightarrow{AB}$.

- ➔ Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, on peut remplacer l'un des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$ par son projeté orthogonal sur l'autre vecteur.

Corollaire *Cas particulier*
Soit trois A,B et C avec A, B distincts.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB), alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Figure

3.2 Une expression du produit scalaire avec les normes et un angle

Propriété Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Alors : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$

Démonstration admise

Exemple Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos 60^{\circ} = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$