Chapitre 9	APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE	1èreS

I Equations de droites et de cercle

1.1 Equation d'une droite de vecteur normal $\vec{n}$

Définition Dire qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à une droite (d) signifie que $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de la droite (d).

Exemple

Propriété (i) Une droite (d) de vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$ non nul a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.
(ii) La droite (d) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0,0)$ admet le vecteur $\vec{n}\binom{a}{b}$ pour vecteur normal.

Démonstration

Conséquence Soit (d) et (d') deux droites qui ont pour équation réduites respectives :
$y = mx + p$ et $y = m'x + p'$. Alors, on a l'équivalence suivante :
(d) et (d') sont perpendiculaires $\Leftrightarrow mm' = -1$.
En effet :

Application : distance d'un point à une droite

1.2 <u>Equation d'un cercle</u>

Propriété $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $A\ (x_A ; y_A)$ et de rayon R.
Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$.

Démonstration

Exemple

Propriété Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$

Démonstration

Exemple

II Calculs de longueurs et d'angles

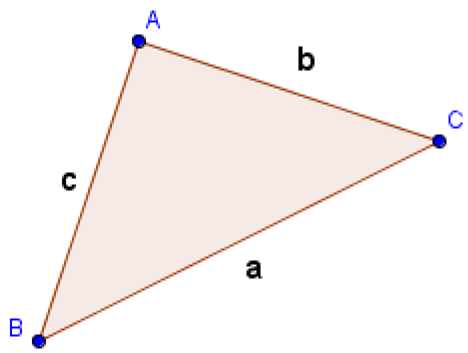
2.1 Théorème de la médiane

Propriété *Théorème de la médiane*
Soit A et B deux points et I est le milieu de [AB].
Pour tout point M, on a la relation suivante :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

Démonstration

2.2 Relations métriques dans un triangle



Propriété *Théorème d'Al-Kachi*
Dans un triangle ABC, avec les notations ci-dessus, on a les relations suivantes :

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$
(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$
(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\hat{C}$

Démonstration

Remarque

Intérêt de cette propriété sur un exemple

Histoire des mathématiques – *biographie d'Al Kachi (? – Environ 1430)*

D'origine persane, l'astronome et mathématicien Al Kachi vit à la cour du prince Ulough-Beg (1393-1449) à Samarkand. Ce dernier protégeant les sciences et les arts, Al-Kachi est à l'abri du besoin. Son principal apport aux mathématiques est l'introduction systématique des fractions décimales (fractions ayant pour dénominateur 10, 100,1000, …), dont il explique le maniement dans son ouvrage Clé de l'arithmétique. A la mort d'Oulough-Beg, l'exil à Constantinople de l'école de Samarkand permet de diffuser cette nouveauté chez les turcs, puis probablement ensuite en Occident.
Al Kachi maîtrise le calcul, on lui doit des extractions de racines sixièmes de nombres en écriture sexagésimale (système de numérotation utilisant la base 60), et un calcul de π avec seize décimales, par une méthode traditionnelle, certes, mais avec une précision inégalée jusqu'à la fin du seizième siècle. Il connaît ce que l'on appelle maintenant le *triangle de Pascal* (que l'on verra plus tard lorsque l'on abordera les probabilités). Al Kachi est le dernier grand mathématicien du monde arabe, juste au moment où la culture occidentale prendra la relève.

Propriété *(de l'aire d'un triangle)*
Dans un triangle ABC d'aire S, avec les notations ci-dessus, on a les relation suivantes :

(1) $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$

(2) $S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$

(3) $S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$

Démonstration

Propriété Dans un triangle ABC, on les égalités suivantes :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Démonstration

Exemple

III <u>Formules de trigonométrie</u>

3.1 <u>Formules d'addition</u>

Propriété Soit a et b deux réels quelconques.

(i) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

(ii) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

(iii) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

(iv) $\sin(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Démonstration

Exemples

3.2 <u>Formules de duplication</u>

Propriété Soit a un réel quelconque.

(i) $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

(ii) $\sin(2a) = 2\cos a \sin a$

Démonstration

3.3 <u>Formules de linéarisation</u>

Propriété Soit a un réel quelconque.

(i) $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

(ii) $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

Démonstration

Exemples