Exercice 1

1) Calculer les cinq premiers termes des suites (u_n) suivantes :

a) Pour tout entier naturel n, $u_n = 2n^2 - 4n + 3$

b) Pour tout entier naturel n > 0, $u_n = \frac{(-2)^n}{n}$

c) Pour tout entier naturel n > 1, $u_n = 2\sqrt{n-2}$

d) Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n-1}{n+1}$

2) Etudier le sens de variation des suites précédentes.

Exercice 2

Pour chacune des suites ci-dessous :

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Écrire u_n en fonction de u_{n-1} pour les questions **a)** et **b)**.

a) u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = -u_n - 5. \end{cases}$$

b) u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n - 4. \end{cases}$$

c) u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}. \end{cases}$$

Exercice 3

1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + (-1)^n$.

a) Ecrire u_{n+1} en fonction de n.

b) Ecrire u_{n+2} en fonction de n.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{1}{2^n} + 2^{n-1}$.

a) Ecrire v_{n+1} en fonction de n.

b) Ecrire v_{n+1} en fonction de v_n.

Exercice 4

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel strictement positif par $u_n = \frac{2^n}{n^2}$

1) Calculer les 4 premiers termes.

2) on cherche à montrer que la suite est croissante à partir du rang 3.

a) Résoudre l'inéquation $\frac{2x^2}{(x+1)^2} > 1$

b) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$

Conclure

3) A l'aide de la calculatrice, déterminer dans chaque cas, le rang de n à partir duquel

a) $u_n > 100$ b) $u_n > 10000$

4) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

Exercice 5

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites arithmétiques de raisons respectives $\frac{-3}{2}$ et $\frac{1}{3}$ .On sait que $u_0 = 653$ et $v_0 = -540$.

a) Calculer u_{871} et v_{3240} .

b) En déduire la valeur des sommes :

$u_0 + u_1 + \ldots + u_{871}$ et $v_0 + v_1 + \ldots + v_{3240}$

2. (w_n) est la suite arithmétique telle que $w_1 + w_2 = 19$ et $w_6 + w_7 + w_8 = 111$.

Calculer w_1 et la raison de la suite (w_n) .

Exercice 6

1) Le but de cette question est de calculer $S = 2 + 6 + 10 + 14 + \cdots + 30$.

a) Montrer que $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$ où (u_n) est une suite arithmétique que l'on définira.

b) En déduire S.

2) Utiliser la méthode précédente pour calculer :

a) $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 31$

b) $S = 4 + 7 + 10 + 13 + \cdots + 34$

c) $\sum_{i=2}^{8} 2i$

Exercice 7

Soit (u_n) la suite pour tout entier n par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{10u_n}{10+u_n} \end{cases}$. On admet que, pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3.

2) On pose $v_n = \frac{5}{u_n}$ pour tout entier naturel n. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Donner sa raison et son 1^er^ terme.

3) Exprimer v_n en fonction de n.

4) En déduire l'expression du terme général de (u_n) en fonction de n.

Exercice 8

1. (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ telle que $u_0 = 5$

a) Calculer u_2, u_3, u_{20} .

b) Calculer la somme $u_5 + u_6 + \ldots + u_{13}$

2. Soit (v_n) une suite géométrique de raison négative. On sait que $v_3 + v_4 = 8$ et $v_4 - 2v_5 = -16$

a) Calculer la raison et le premier terme de la suite (v_n) .

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Exercice 9

1) Le but de cette question est de calculer $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{64}$.

a) Montrer que $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$ où (u_n) est une suite géométrique que l'on définira.

b) En déduire S.

2) Utiliser la méthode précédente pour calculer :

a) $S = 1 + 0{,}1 + \cdots + 10^{-4}$

b) $S = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{729}$

c) $\sum_{i=2}^{8} 2^i$

Exercice 10

Soit (u_n) la suite pour tout entier n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3.

2) Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2) On pose $v_n = u_n + 5$ pour tout entier naturel n. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son 1er terme.

3) Exprimer v_n en fonction de n.

4) En déduire l'expression du terme général de (u_n) en fonction de n.

Exercice 11 *d'après un sujet de BAC*

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=2$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$.

1. a) Calculer $u_{1,} u_{2,} u_3$ et u_4 .On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2}près.
b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. On suppose que pour tout entier naturel n, $u_n \leq n+3$

a) Démontrer que pour tout entier naturel, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

b) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire, que pour tout entier naturel n, $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$.

c) Exprimer $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.