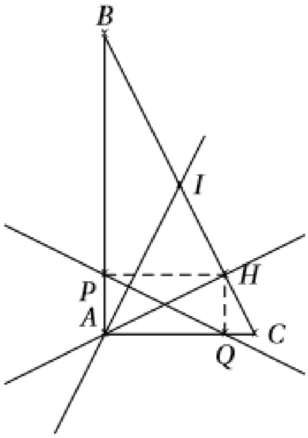
Exercice 1

ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A ; I est le milieu de $[BC]$; P et Q sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur (AB) et (AC).

1. Montrer que $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}$.
2. Justifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}$ et que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{PQ}=0$.
4. Que peut-on en déduire pour les droites (AI) et (PQ) ?



Exercice 2

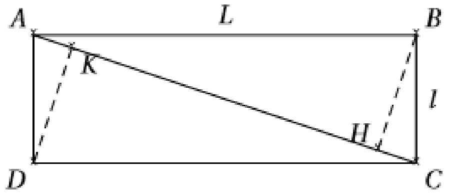
ABC est un triangle dans lequel $AB=2$ et $AC=3$. De plus $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4$. Ce triangle est-il rectangle ?

Exercice 3

$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB=4$, $AD=5$ et $AC=7$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. En déduire BD

Exercice 4

$ABCD$ est un rectangle de longueur L et de largeur l. Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC).



1. Calculer HK en fonction des longueurs des côtés L et l.
   On pourra évaluer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$.
2. Comment choisir L et l pour avoir $AC=2HK$?
   Exprimer alors l'aire du parallélogramme $BHDK$ en fonction de l'aire du rectangle $ABCD$.

Exercice 5

$ABCD$ est un losange de sens direct et de centre O On donne $AC=10$ et $BD=6$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
2. On note P le projeté orthogonal de D sur la droite (AB). Calculer AP.
3. En déduire la hauteur du losange si l'on choisit comme base le côté $[AB]$

Exercice 6

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB=8\,\text{cm}$ et $AD=6\,\text{cm}$ et on nomme I le milieu du segment $[CD]$.

1. Faire une figure, que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice, puis calculer la longueur AC.

2. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ et en déduire que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI}=68$.

3. Soit H le projeté orthogonal de I sur (AC).
En calculant d'une autre manière le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI}$, déterminer la longueur du segment $[AH]$.

Exercice 7

ABC est un triangle rectangle isocèle en A. D et E sont des points appartenant respectivement à $[AB]$ et $[AC]$ tels que $AD = AE$. F est le milieu de $[CD]$.
Démontrer que (AF) est perpendiculaire à (EB).

Exercice 8

On considère un carré direct $ABCD$, M un point libre sur le segment $[AB]$ et N le point tel que le triangle ANM soit direct, rectangle et isocèle en A. Que peut-on dire des droites (BN) et (DM) ?

Exercice 9

A et B désignant deux points distincts du plan, on nomme $\mathscr{C}$ un des deux demi-cercles de diamètre $[AB]$.
Sur $\mathscr{C}$ privé de ses extrémités, on place deux points distincts I et J.
Enfin, la hauteur issue de I dans le triangle ABI coupe (AB) en H et (AJ) en K.
Établir, en ne calculant aucun produit scalaire, que $AI^2 = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AJ}$.

Exercice 10 *Une histoire d'inégalité…*

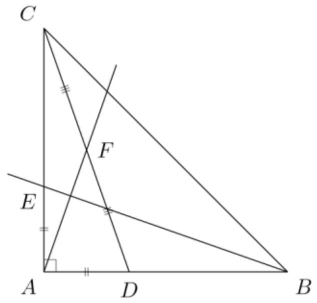
Le but de cet exercice est de prouver, par deux méthodes différentes, que pour tous réels x, y, z et t :

$$(xz + yt)^2 \leqslant (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) \quad (\bigstar)$$

1. Vérifier que $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) - (xz + yt)^2 = (xt - yz)^2$ et en déduire $(\bigstar)$.

2. Justifier que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, $(\vec{u}.\vec{v})^2 \leqslant ||\vec{u}||^2 \times ||\vec{v}||^2$ puis démontrer $(\bigstar)$ en considérant les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$ dans le plan muni d'une base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

EXERCICE 13

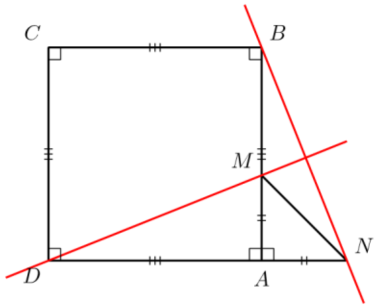


En choisissant AB pour unité de longueur, on se place dans le repère orthonormal $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
En notant x l'abscisse du point D dans ce repère, nous pouvons donner les coordonnées respectives des points de la configuration de l'énoncé :

- $A\,(0;0)$;
- $C\,(0;1)$;
- $E\,(0;x)$;
- $B\,(1;0)$;
- $D\,(x;0)$;
- $F\,\left(\dfrac{x}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Il vient alors :
$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}x_F-x_A\\y_F-y_A\end{pmatrix}=\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}x/2\\1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}x_B-x_E\\y_B-y_E\end{pmatrix}=\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}1\\-x\end{pmatrix}$
et $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EB}=\dfrac{x}{2}\times 1+\dfrac{1}{2}\times(-x)=0$.
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont orthogonaux d'où les droites (AF) et (EB) sont perpendiculaires.

EXERCICE 15



On se place dans le repère orthonormal $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$ et on note x la distance AM.
On a $D\,(0;0)$, $B\,(1;1)$, $M\,(1;x)$ et $N\,(1+x;0)$ donc $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}x_N-x_B\\y_N-y_B\end{pmatrix}=\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}x\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x_M-x_D\\y_M-y_D\end{pmatrix}=\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$.

Par conséquent :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{DM}&=x_{\overrightarrow{BN}}\times x_{\overrightarrow{DM}}+y_{\overrightarrow{BN}}\times y_{\overrightarrow{DM}}\\&=x\times 1+(-1)\times x\\&=0\end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont orthogonaux d'où les droites (BN) et (DM) sont perpendiculaires.