

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -2$ et pour n entier naturel $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Démontrer par récurrence que :

- a) $u_n < 6$.
b) $u_n = 6 - \frac{8}{2^n}$.
2. a) Résoudre dans \mathbb{N} l'inéquation $4n > 2(n+1)$.
b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 3$, $2^n > 2n$.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = \frac{1}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(v_n + \frac{2}{v_n} \right).$$

a) Calculer v_1, v_2 et v_3 .

b) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$.

Etudier le sens de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

c) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $v_n \geq \sqrt{2}$.

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes en justifiant soigneusement.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \frac{1}{x} - 2$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - x^2 + 1$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 1}{6x^3 - x^2}$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 2e^x$

5. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 + \frac{3}{x} - 50$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}$

Exercice 3

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2-7x+10}{(x-2)^2}$ définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$.

1. Que dire de la limite en 2 ?
2. Factoriser $x^2 - 7x + 10$.
3. a) Déterminer les limites à droite et à gauche de $f(x)$ quand x tend vers 2.
b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

Exercice 4

On considère la fonction $h \mapsto \frac{x-2}{2x+8}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h .
2. a) Calculer $h'(x)$.
b) Déterminer le signe de $h'(x)$. Puis donner les variations de la fonction h .
3. a) Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
b) La courbe de la fonction h admet-elle des asymptotes ? *Justifier*
4. Construire le tableau de variations de la fonction h (*n'oubliez pas les limites !*).

BONUS !

- 1) Démontrer que pour tout $n \geq 4, n^2 \leq 2^n$.
- 2) a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\sqrt{x+n} - \sqrt{x}$.
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \dots + \sqrt{x+n} - n\sqrt{x}$

Barème probable

Ex 1 : 6

Ex 2 : 5

Ex 3 : 4

Ex 4 : 5

Bonus : 2