Correction du DS n°2 (13/10/20)

Exercice 1

1) a) (P_n) : $u_n < 6$

- Initialisation : $u_0 = -2$ soit $u_0 < 6$ donc (P_0) vraie.
- Hérédité : Supposons pour $n \in \mathbb{N}$ (P_n) vraie et montrons que $u_{n+1} < 6$.

On a :
$$u_n < 6$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n < 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n + 3 < 6$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} < 6$$

(P_{n+1}) est vraie.

- $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 6.}$

b) (P_n) : $u_n = 6 - \frac{8}{2^n}$.

- Initialisation : $n=0$, $6 - \frac{8}{2^0} = 6 - \frac{8}{1} = -2 = u_0$, (P_0) vraie.
- Hérédité : Supposons pour $n \in \mathbb{N}$ (P_n) vraie et montrons que $u_{n+1} = 6 - \frac{8}{2^{n+1}}$.

On a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}\left(6 - \frac{8}{2^n}\right) + 3$
$$= 3 - \frac{8}{2^{n+1}} + 3$$

Soit $u_{n+1} = 6 - \frac{8}{2^{n+1}}$

(P_{n+1}) est vraie

- $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 6 - \frac{8}{2^n}.}$

2) a) $4n > 2(n+1)$
$$\Leftrightarrow 4n > 2n + 2$$
$$\Leftrightarrow 2n > 2$$
$$\Leftrightarrow n > 1 \quad \text{Soit pour } n \geq 2.$$

<u>L'ensemble solution de cette inéquation est l'ensemble des entiers n supérieurs à 2.</u>

b) (P_n) : $2^n > 2n$.

- Initialisation : $2^3 = 8$ et $2 \times 3 = 6$ or $8 > 6$. Donc (P_3) vraie.
- Hérédité : Supposons (P_n) vraie pour $n \geq 3$ et montrons que $2^{n+1} > 2(n+1)$.

On a : $2^{n+1} = 2^n . 2 > 2n . 2$
$$> 4n$$
$$> 2(n+1) \text{ pour } n \geq$$

Donc à fortiori, $2^{n+1} > 2(n+1)$ pour $n \geq 3$.

- $\underline{\forall n \geq 3,\ 2^n > 2n}$