

3) a) $v_1 = 2,25 = \frac{9}{4}$
 $v_2 = \frac{113}{72} \approx 1,57$
 $v_3 = \frac{23137}{16272} \approx 1,41$

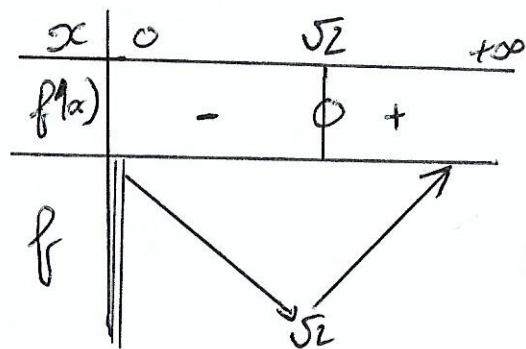
b) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

On a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Le signe de $f'(x)$ dépend de $x^2 - 2$ car $2x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$



$a=1 > 0$ donc minimum $x^2 - 2$.

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{2})$$

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

c) On a $v_{n+1} = f(v_n)$.

Soit (P_n) : $v_n \geq \sqrt{2}$

• Initialisation : $v_1 = \frac{9}{4} = 2,25$ et $\sqrt{2} \approx 1,414$
 soit $v_1 \geq \sqrt{2}$ donc (P_1) vraie

• Héritage : Supposons pour $n \in \mathbb{N}^*$ (P_n) vraie et montrons que $v_{n+1} \geq \sqrt{2}$

Soit $v_n \geq \sqrt{2}$

alors $f(v_n) \geq f(\sqrt{2})$ car f est croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.
 donc $v_{n+1} \geq \sqrt{2}$

(P_{n+1}) est vraie.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq \sqrt{2}$

Exercice 2

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \frac{1}{x} - 2 = +\infty$$

2) F.I du type " $\infty - \infty$ ".

$$x^4 - x^2 + 1 = x^4 \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

donc par somme puis par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - x^2 + 1 = +\infty$$

3) F.I du type " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$\frac{2x^3 - 1}{6x^5 - x^2} = \frac{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(6 - \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{2 - \frac{1}{x^3}}{6 - \frac{1}{x^3}}$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ (par somme: $2 - \frac{1}{x^3} \rightarrow 2$ et $6 - \frac{1}{x^3} \rightarrow 6$)

donc par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 1}{6x^5 - x^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$

donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 2e^x = +\infty$