3) a) $v_1 = 2,25 = \frac{9}{4}$

$v_2 = \frac{113}{72} \simeq 1,57$

$v_3 = \frac{23137}{16272} \simeq 1,41$

b) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$

$f'(x) = \frac{x^2-2}{2x^2}$

On a $f'(x) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

Le signe de $f'(x)$ dépend de x^2-2 car $2x^2 > 0$ sur $]0;+\infty[$

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	||	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	

$a = 1 > 0$ du trinôme x^2-2.

$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)$

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

c) On a $v_{n+1} = f(v_n)$.

Soit (P_n) : $v_n \geq \sqrt{2}$

• Initialisation : $v_1 = \frac{9}{4} = 2,25$ et $\sqrt{2} \simeq 1,414$

soit $v_1 \geq \sqrt{2}$ donc (P_1) vraie

• Hérédité : Supposons pour $n \in \mathbb{N}^*$ (P_n) vraie et montrons que $v_{n+1} \geq \sqrt{2}$

Soit $v_n \geq \sqrt{2}$

alors $f(v_n) \geq f(\sqrt{2})$ car f est croissante sur $[\sqrt{2};+\infty[$.

donc $v_{n+1} \geq \sqrt{2}$

(P_{n+1}) est vraie.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geq \sqrt{2}$

Exercice 2

1) $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme :

$\lim_{x\to+\infty} x^2 + \frac{1}{x} - 2 = +\infty$

2) F.I du type "$\infty - \infty$" :

$x^4 - x^2 + 1 = x^4\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$

$\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

donc par somme puis par produit :

$\lim_{x\to-\infty} x^4 - x^2 + 1 = +\infty$

3) F.I du type "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\frac{2x^3-1}{6x^3-x^2} = \frac{x^3\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(6-\frac{1}{x}\right)} = \frac{2-\frac{1}{x^3}}{6-\frac{1}{x}}$

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ (par somme : $2 - \frac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$ et $6 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 6$)

donc par quotient $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-1}{6x^3-x^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

4) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = \lim_{x\to+\infty} 2e^{x} = +\infty$

donc par somme $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} + 2e^{x} = +\infty$